
Exercice 1

Pour n entier, $n \geqslant 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes $x_1, x_2 \ldots, x_n$ par :

$$V\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

1. Calculer $V\left(x_1, x_2\right)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes $x_1, x_2 \ldots, x_n$ deux à deux distincts.
   Dans la suite, $x_1, x_2 \ldots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

2. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t\right)$.
   Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.
   Démontrer par récurrence que $V\left(x_1, x_2 \ldots, x_n\right) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

3. Première application
   Calculer le déterminant de la matrice $A = \left(i^j\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \ldots, n)$.

4. Deuxième application
   Donner un exemple de n nombres complexes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.
   Soit n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 \quad \cdots \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.
   On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

Exercice 2

Dans cet exercice, $\|\ .\|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A.B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

1. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge. On notera e^A sa somme.
2. Démontrer que l'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r > 0$, déterminer la limite de $\dfrac{1}{\|H\|} \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$ lorsque H tend vers 0.
   En déduire que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0.
   On précisera sa différentielle en 0.

Problème

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.
Dans ce problème, on note $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques.
On dit que la matrice $A \in \mathcal{S}_n$ est symétrique positive lorsque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Pour a et b deux réels, on note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer, en détaillant les calculs, que $A \in \mathcal{S}_3^+$, si et seulement si, ($a + 2b \geqslant 0$ et $a \geqslant b$).
2. Calculer J^k pour tout entier k non nul. Cette relation est-elle valable pour $k = 0$?
   En utilisant la relation $A = (a - b)I_3 + bJ$, calculer et expliciter e^A.
   On pourra utiliser sans démonstration que, si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent, alors $e^{A \cdot B} = e^A e^B$.
   Vérifier que $e^A \in \mathcal{S}_3^+$.
3. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{S}_n^+$ est semblable à une matrice diagonale D, déterminer une matrice diagonale semblable à la matrice e^A. En déduire que $e^A \in \mathcal{S}_n^+$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Dans cette partie, pour une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $E(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de terme général $e^{a_{i,j}}$: $E(A) = (e^{a_{i,j}})$.
Nous allons démontrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+$, alors $E(A) \in \mathcal{S}_n^+$.
On définit le produit de Hadamard de deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ noté $*$ par :

$$A * B = (a_{i,j} b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note le produit usuel de deux matrices A et B par AB. On confond une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ avec son terme réel.

4. Vérifier que, lorsque la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3^+$, la matrice $E(A) \in \mathcal{S}_3^+$.
5. Si D est une matrice diagonale dont tous les termes sont positifs ou nuls et si Y est matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, quel est le signe de $Y^\top DY$?
   En déduire le résultat de cours suivant : une matrice A de $\mathcal{S}_n$ appartient à $\mathcal{S}_n^+$ si, et seulement si, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $X^\top AX \geqslant 0$.
6. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$ et α, β deux réels positifs, démontrer, en utilisant la question précédente, que $\alpha A + \beta B$ est une matrice de $\mathcal{S}_n^+$.
   Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$, a-t-on nécessairement $AB \in \mathcal{S}_n^+$?

7. Si $A \in \mathcal{S}_n^+$, démontrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $A = R^2$.
8. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$, si on pose $A = U^2$ et $B = V^2$ avec $U = (u_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$, $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$ et si $A * B = (c_{i,j})$, vérifier que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$c_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} v_{\ell,i}v_{\ell,j}\right).$$

   En déduire que, si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$, on a $A * B \in \mathcal{S}_n^+$.
9. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on note A^{*p} la matrice $A * A * \ldots * A$ (p fois). On note $A^{*0} = (1)$ la matrice dont tous les termes sont égaux à 1 et $A^{*1} = A$.
   Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la limite de la suite de matrices (T_N) définie pour tout entier naturel N non nul par $T_N = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} A^{*p}$.
10. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, justifier que l'application $M \mapsto X^\top MX$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis démontrer que $\mathcal{S}_n^+$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n$. En déduire que si $A \in \mathcal{S}_n^+$ alors $E(A) \in \mathcal{S}_n^+$.
