Pépinières de Terminale
février 2024
D. Leroy

ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Ordre choisi : 5, 3, 2, 1, 4.

Exercice 1 – placement sur une table circulaire

Combien y a-t-il de façons différentes d'assoir 6 filles et 15 garçons autour d'une table circulaire de **21** places de sorte qu'il y ait au moins deux garçons entre chaque fille ?
On ne considèrera que les positions relatives des personnes entre elles.

Exercice 2 – sommes et formules du binôme

Pour n entier naturel non nul, calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{2n}{2k}$$

Le cas général est $n \geqslant 2$, le cas où $n = 1$ se traite à part.

Exercice 3 – relations entre coefficients

Soit n un entier naturel non nul et soit, pour tout k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 2n$, a_k le coefficient de x^k dans le développement de l'expression $(1 + x + x^2)^n$. Montrer que :

1. $a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - \cdots - a_{2n-1} a_{2n} = 0$
2. $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}^2 + (-1)^n a_n^2 = a_n$
3. $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = \frac{3^n+1}{2}$ et $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = \frac{3^n-1}{2}$
4. $$a_k - n a_{k-1} + \binom{n}{2} a_{k-2} + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} a_0 = 0 \text{ si } k \text{ n'est pas multiple de } 3$$

Exercice 4 – principe des tiroirs

Énoncé 1
Énoncé initial, que je n'ai pas compris : Parmi 17 scientifiques, chacun est en correspondance avec tous les autres. Dans leurs échanges de lettres, ils ne traitent que trois sujets et un scientifique sur deux ne traite qu'un seul sujet.
Montrons qu'il y a au moins 3 scientifiques qui traitent un seul et même sujet.
Énoncé modifié
On considère 17 mathématiciens qui travaillent sur au maximum 3 problèmes. 8 d'entre eux ne travaillent que sur un seul problème. Vérifier qu'il y a au moins 3 mathématiciens qui travaillent sur un seul et même problème.

Énoncé 2
Dix joueurs ont pris part à un tournoi d'échecs où chaque joueur doit jouer exactement une partie contre tous les autres joueurs. Un joueur marque 1 point s'il gagne un duel, il perd un point s'il perd le duel et 0 point clôt un duel avec match nul. À la fin du tournoi, on constate que plus de 70% se sont terminés par un match nul.
Montrer que deux joueurs ont le même score final.

Exercice 5 – tiré du concours général 2021

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \ldots 2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

— on tire trois boules simultanément ;

— si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c, avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c puis on replace dans le sac la boule de numéro b ;

— on recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k, on note $\mathrm{P}(D_n = k)$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

I Étude des petits cas

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_1.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_2.

II Valeurs extrêmes et symétrie

1. Déterminer la probabilité $\mathrm{P}(D_n = 0)$.
2. Déterminer la probabilité $\mathrm{P}(D_n = 1)$ en fonction de n.
3. Soit i entier compris entre 0 et $2n$. Pourquoi a-t-on $\mathrm{P}(D_n = i) = \mathrm{P}(D_n = 2n - i)$?
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n.

Éléments de réponse

Exercice 1 – placement sur une table circulaire

On imagine bien les personnes se présentant devant nous et à placer en respectant la consigne. On s'aperçoit que chaque fille a un garçon à sa gauche et à sa droite. On peut donc constituer des trios autour des 6 filles :

$$\text{Trio } = \text{une fille avec à sa gauche un garçon et à sa droite un garçon}$$

et il restera 3 garçons isolés. Pour constituer ces 6 trios préparatoires autour des 6 filles, il y a

$$(15\times 14)\times(13\times 12)\times\cdots\times(7\times 6)\times(5\times 4)=\frac{15!}{3!}$$

façons de faire, et autour de ces 6 trios, il y a 3 groupes de 1 garçon solitaire :

$$\text{trio, trio, trio, trio, trio, trio, solitaire, solitaire, solitaire}$$

et il s'agit maintenant de placer tous ces petits groupes sur les chaises.
Il suffit de se fixer un point de départ (sans le dénombrer puisque la table est circulaire et qu'on ne s'intéresse qu'aux positions relatives des individus). On place donc arbitrairement une fille (et son voisin garçon de gauche et son voisin garçon de droite). Puis on choisit le groupe qui vient tout de suite à gauche de ce trio : isolé ou trio, peu importe. Il y a 8 choix (8 groupes). À nouveau, on choisit le groupe, trio ou isolé, peu importe, qui viendra juste à gauche. Il y a cette fois 7 choix. Et on recommence... Les placements se font donc de 8! façons.

$\boxed{\text{Il y a } \dfrac{15!8!}{3!} \text{ placements suivant la consigne.}}$

Exercice 2 – sommes et formules du binôme

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, calculons les sommes :

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}\qquad\text{et}\qquad S_2=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{2n}{2k}$$

Une première idée, avec une indéterminée x dans la formule du binôme
On rapelle la formule du binôme de Newton : $\sum\limits_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}a^\ell b^{m-\ell}=(a+b)^m$. Pour tout réel x,

$$(1+x)^n=P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

L'idée est ici de dériver cette fonction polynomiale, ce qui aura pour effet de faire descendre l'exposant à côté de $\binom{n}{k}$:

$$n(1+x)^{n-1}=P_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}\quad(\sharp)$$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=P_n''(x)=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2}\quad(\sharp\sharp)$$

Dans l'idée d'appliquer ($\sharp$), on écrit astucieusement $k^2 = k(k-1+1) = k(k-1)+k$.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= P_n''(1) + P_n'(1) = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2) \end{aligned}$$

$\boxed{S_1 = n(n+1)2^{n-2} \text{ pour } n \geqslant 2}$

Par ($\sharp\sharp$),

$$2n(2n-1)(1+x)^{2n-2} = P_{2n}''(x) = \sum_{k=2}^{2n} k(k-1)\binom{2n}{k} x^{k-2}$$

> Pour obtenir des termes d'indices pairs uniquement, on peut penser à :
>
> $$1 + (-1)^p = \begin{cases} 0 \text{ si } p \text{ est impair} \\ 2 \text{ si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

ce qui nous incite à évaluer P_n'' en 1 et en -1 :

$$\begin{cases} 2n(2n-1)(1+1)^{2n-2} & = \sum_{k=2}^{2n} k(k-1)\binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} k(k-1)\binom{2n}{k} \\ 0 = 2n(2n-1)(1-1)^{2n-2} & = \sum_{k=2}^{2n} k(k-1)\binom{2n}{k}(-1)^{k-2} = \sum_{k=0}^{2n} k(k-1)\binom{2n}{k}(-1)^{k} \end{cases}$$

car $k-2$ et k ont même parité. En sommant ces deux égalités, il vient :

$$\begin{aligned} 2n(2n-1)(1+1)^{2n-2} &= \sum_{k=0}^{2n} k(k-1)\binom{2n}{k}(1+(-1)^k) \\ &= \sum_{k \text{ pair compris entre } 0 \text{ et } 2n} 2k(k-1)\binom{2n}{k} \\ &= \sum_{p=0}^{n} 4p(2p-1)\binom{2n}{2p} \\ n(2n-1)2^{2n-3} &= \sum_{p=0}^{n} p(2p-1)\binom{2n}{2p} = 2S_2 - \sum_{p=0}^{n} p\binom{2n}{2p} \end{aligned}$$

Terminons avec les dérivées premières $P_n'(x)$ et les mêmes idées :

$$2n(1+x)^{2n-1} = P_{2n}'(x) = \sum_{k=1}^{2n} k\binom{2n}{k} x^{k-1}$$

et par évaluation en 1 et en -1 :

$$\begin{cases} 2n2^{2n-1} & = \sum_{k=1}^{2n} k\binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} k\binom{2n}{k} \\ 0 & = \sum_{k=1}^{2n} k\binom{2n}{k}(-1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n} k\binom{2n}{k}(-1)^{k-1} \end{cases}$$

On soustrait :

$$\begin{array}{rcl}
2n2^{2n-1} - 0 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k\binom{2n}{k}(1-(-1)^{k-1}) \\
& & \text{il ne subsiste que les termes d'indice } k \text{ pair} \\
& = & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} 2p\binom{2n}{k} \times 2 \\
n2^{2n-2} & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{2n}{2p}
\end{array}$$

et finalement,

$$2S_2 = n(2n-1)2^{2n-3} + n2^{2n-2} = n2^{2n-3}(2n-1+2)$$

$$\boxed{S_2 = n(2n+1)2^{2n-4} \text{ pour } n \geqslant 2}$$

Une autre idée, avec une formule sur les coefficients binomiaux

On va utiliser le fait que grâce aux factorielles, $p\binom{m}{p}$ se simplifie : $\frac{pm!}{p!(m-p)!} = \frac{pm!}{p(p-1)!(m-p)!} = \ldots$. On va avoir :

$$\boxed{p\binom{m}{p} = m\binom{m-1}{p-1} \text{ ou encore } \binom{m}{p} = \frac{m}{p}\binom{m-1}{p-1} \quad (\star)}$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $m \geqslant p$, on a

$$\frac{m}{p}\binom{m-1}{p-1} = \frac{m}{p} \times \frac{(m-1)!}{(p-1)!(m-1-(p-1))!} = \frac{m!}{p!(m-p)!} = \binom{m}{p}$$

Dans l'idée d'appliquer $(\star)$, on écrit astucieusement $k^2 = k(k-1+1) = k(k-1)+k$.

$$\begin{array}{rcl}
S_1 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\
& & \text{et par } (\star) : \\
& = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\
& = & \displaystyle n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
& = & \displaystyle n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j} + n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}
\end{array}$$

On rapelle la formule du binôme de Newton : $\sum\limits_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}a^{\ell}b^{m-\ell} = (a+b)^m$.

$$S_1 = n(n-1)(1+1)^{n-2} + n(1+1)^{n-1} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2)$$

$$\boxed{S_1 = n(n+1)2^{n-2} \text{ pour } n \geqslant 2}$$

Dans la façon de faire qui suit, on va utiliser les idées suivantes :

$$\begin{cases}
\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} u_k = \sum_{p \text{ pair}, 0\leqslant p\leqslant 2n} u_p + \sum_{p \text{ impair}, 0\leqslant p\leqslant 2n} u_p \\
\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} (-1)^k u_k = \sum_{p \text{ pair}, 0\leqslant p\leqslant 2n} u_p - \sum_{p \text{ impair}, 0\leqslant p\leqslant 2n} u_p
\end{cases}$$

puisque quand p est pair, $(-1)^p = 1$ et quand p est impair, $(-1)^p = -1$.
On remarque que :

$$S_2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2n}(2k)^2\binom{2n}{2k} = \frac{1}{4}\sum_{p \text{ pair}, 0\leqslant p\leqslant 2n} p^2\binom{2n}{p}$$

et pour suivre nos idées, il est intéressant de poser en parallèle :

$$T_2 = \frac{1}{4}\sum_{p \text{ impair}, 0\leqslant p\leqslant 2n} p^2\binom{2n}{p}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} S_2 + T_2 &= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{2n} p^2\binom{2n}{p} \\ &\quad \text{et par la formule de } S_1 \text{ appliquée en } 2n : \\ &= \frac{1}{4}(2n)(2n+1)2^{2n-2} = n(2n+1)2^{2n-3} \end{aligned}$$

et que, d'autre part, $S_2 - T_2 = \frac{1}{4}\sum\limits_{p=0}^{2n}(-1)^p p^2\binom{2n}{p}$. Pour calculer cette somme, il n'y a qu'à reprendre légèrement différemment le calcul de $S_1 \ldots$
Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k \\ &= n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\ &= n(n-1)x^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^j + nx\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j \\ &= n(n-1)x^2(1+x)^{n-2} + nx(1+x)^{n-1} \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{2n} k^2\binom{2n}{k} = 2n(2n-1)x^2(1+x)^{2n-2} + 2nx(1+x)^{2n-1}$$

On évalue en $x = -1$. Comme $2n - 2 \in \mathbb{N}^*$, on a $0^{2n-2} = 0$, et comme $2n - 1 > 0$, on a $0^{2n-1} = 0$ (ma vigilance est due au fait que $0^0 = 1$, donc il ne faut pas trop se précipiter).

$$\sum_{k=0}^{2n} k^2\binom{2n}{k}(-1)^k = 0 \text{ puis } S_2 - T_2 = 0$$

À ce stade, on a $\begin{cases} S_2 + T_2 &= n(2n+1)2^{2n-3} \\ S_2 - T_2 &= 0 \end{cases}$ donc $\boxed{S_2 = n(2n+1)2^{2n-4} \text{ pour } n \geqslant 2}$.

Terminons par le cas $n = 1$, qui se traite à part :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} k^2\binom{1}{k} = 1^2\binom{1}{1} = 1 \text{ et } 1(1+1)2^{1-2} = 1$$

donc la formule que nous avions trouvée pour S_1 s'étend à $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_2 = \sum_{k=0}^{1} k^2\binom{2}{2k} = 1 \text{ et } 1(2+1)2^{-2} = \frac{3}{4}$$

donc la formule que nous avions trouvée pour S_2 ne s'étend pas à $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 – relations entre coefficients

Soit n un entier naturel non nul et soit, pour tout k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 2n$, a_k le coefficient de x^k dans le développement de l'expression $P_n(x) = (1+x+x^2)^n$.

Familiarisons-nous :

$$\begin{array}{ll} n=1 & P_1(x) = 1+x+x^2 \\ n=2 & P_2(x) = 1+2x+3x^2+2x^3+x^4 \\ n=3 & P_3(x) = (1+x+x^2)P_2(x) = P_2(x) + xP_2(x) + x^2P_2(x) \\ & P_3(x) = 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6 \end{array}$$

Des idées importantes pour certains passages de l'exercice

- On rappelle la formule du binôme (valable pour $n \in \mathbb{N}$ avec la convention $0^0 = 1$) :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- On rappelle qu'on peut identifier les coefficients de deux fonctions polynomiales :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m = d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m) \Rightarrow (c_0 = d_0,\ c_1 = d_1,\ \ldots c_m = d_m)$$

- Quels coefficients obtient-on quand on multiplie deux fonctions polynomiales ?

$$(a_0 + a_1 x + a_m x^m)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) = c_0 + \cdots + c_{m+n} x^{m+n} \text{ où } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

En effet,

$$\begin{aligned} (\sum_{\ell=0}^{m} a_\ell x^\ell)(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j) &= \sum_{\ell=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_\ell b_j x^{\ell+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{(\ell,j)/\ \ell+j=k} a_\ell b_j x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) x^k \end{aligned}$$

1. Montrons que $a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - \cdots - a_{2n-1} a_{2n} = 0$.
   C'est vérifié dans nos exemples de familiarisation parce qu'on remarque que $a_0 = a_{2n}$, $a_1 = a_{2n-1}$,..., $a_n = a_{2n-n}$. Montrons cette « symétrie ».

   Par récurrence
   Soit $\mathcal{F}_n$: « dans $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, les coefficients vérifient $a_k = a_{2n-k}$ pour tout k compris entre 0 et n ».
   Par notre familiarisation, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$ sont vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{F}_n$ est vraie.

$$\begin{array}{rcl} P_{n+1}(x) & = & (\sum\limits_{k=0}^{2n} a_k x^k)(1+x+x^2) \\ & = & (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n}x^{2n}) \\ & & +(a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n+1}) \\ & & +(a_0 x^2 + a_1 x^3 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+2}) \\ & = & a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_2 + a_1 + a_0)x^2 + \cdots + (a_{2n} + a_{2n-1} + a_{2n-2})x^{2n} \\ & & +(a_{2n} + a_{2n-1})x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n+2} \end{array}$$

Le terme en x^k a pour coefficient $a_k + a_{k-1} + a_{k-2}$, soit par hypothèse de récurrence $a_{2n-k} + a_{2n-k+1} + a_{2n-k+2}$, soit encore $a_{2(n+1)-k} + a_{2(n+1)-k-1} + a_{2(n+1)-k-2}$, ce qui est bien le coefficient du terme en $x^{2(n+1)-k}$.
$\mathcal{F}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Par une astuce
Pour $x \neq 0$,

$$\begin{array}{rcl} P_n(x) & = & (1+x+x^2)^n = x^{2n}(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^n \\ & = & x^{2n} P_n(\frac{1}{x}) = x^{2n} \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k (\frac{1}{x})^k \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k x^{2n-k} = \sum\limits_{j=0}^{2n} a_{2n-j} x^j \text{ (changement d'indice)} \end{array}$$

Donc $\sum\limits_{k=0}^{2n} a_k x^k = \sum\limits_{j=0}^{2n} a_{2n-j} x^j$ et par identification des coefficients de deux fonctions polynomiales, pour tout k compris entre 0 et $2n$, on a $a_k = a_{2n-k}$.

On a donc en particulier : $a_0 a_1 = a_{2n} a_{2n-1}$, $a_1 a_2 = a_{2n-1} a_{2n-2}$, etc.

Encore une idée (de l'un des participants qui se reconnaîtra !)
Par la formule du binôme deux fois de suite :

$$\begin{array}{rcl} P_n(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+x^2)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} x^{2j} \\ & & \ell = j + k \text{ dans la deuxième somme} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{\ell=k}^{2k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell - k} x^\ell \\ & = & \sum\limits_{(\ell,k)/\ 0 \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \leqslant \ell \leqslant 2k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell - k} x^\ell \\ & = & \sum\limits_{\ell=0}^{2n} a_\ell x^\ell \end{array}$$

avec

$$a_\ell = \sum_{k \text{ entier, } \frac{\ell}{2} \leqslant k \leqslant \min(\ell,n)} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell - k}$$

Soit ℓ fixé entre 0 et n. On a $2n-\ell \geqslant n$ et

$$\begin{aligned}
a_{2n-\ell} &= \sum_{k \text{ entier},\ \frac{2n-\ell}{2}\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}\binom{k}{2n-\ell-k} \\
&\quad \text{changement d'indice } j=\ell+k-n \\
&= \sum_{j \text{ entier},\ \frac{\ell}{2}\leqslant j\leqslant \ell} \binom{n}{j-\ell+n}\binom{j-\ell+n}{n-j} \\
&= \sum_{j \text{ entier},\ \frac{\ell}{2}\leqslant j\leqslant \ell} \binom{n}{n-j}\binom{j}{\ell-j} \text{ par } (*) \text{ ci-dessous} \\
&= \sum_{j \text{ entier},\ \frac{\ell}{2}\leqslant j\leqslant \ell} \binom{n}{j}\binom{j}{\ell-j} \\
&\quad \text{par propriété } \binom{n}{n-j}=\binom{n}{j}
\end{aligned}$$

$(*)$: Montrons $\binom{b}{a}\binom{a}{c}=\binom{b}{c}\binom{b-c}{b-a}$.

$$\begin{aligned}
\binom{b}{a}\binom{a}{c} &= \frac{b!}{a!(b-a)!}\frac{a!}{c!(a-c)!} \\
&= \frac{b!}{(b-a)!c!(a-c)!} = \frac{b!}{c!(b-c)!}\frac{(b-c)!}{(b-a)!(a-c)!} \\
&= \binom{b}{c}\binom{b-c}{b-a}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\cdots-a_{2n-1}a_{2n}=0}$$

2. Montrons que $a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}^2+(-1)^na_n^2=a_n$.
   Le membre de gauche est, par la symétrie observée « $a_k=a_{2n-k}$ », $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^ka_ka_{2n-k}$. Quand on développe :

$$P_n(x)P_n(-x)=(a_0+a_1x+\cdots+a_{2n}x^{2n})(a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots+(-1)^{2n}a_{2n}x^{2n})$$

   le terme en degré $2n$ est justement $\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^ja_ja_{2n-j}$. Mais par ailleurs,

$$(1+x+x^2)(1-x+x^2)=1+x+x^4-x-x^2-x^3+x^2+x^3+x^4=1+x^2+x^4$$

   Donc $P_n(x)P_n(-x)=P_n(x^2)$ et le coefficient du terme en degré $2n$ est bien a_n dans $P_n(x^2)$.
   $$\boxed{a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}^2+(-1)^na_n^2=a_n}$$

3. Montrons que $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\frac{3^n+1}{2}$ et $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\frac{3^n-1}{2}$.

$$\begin{cases}
3^n+1 &= P_n(1)+P_n(-1)=\sum\limits_{k=0}^{2n}(1+(-1)^k)a_k=\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant 2n,\ k \text{ pair}} 2a_k \\
3^n-1 &= P_n(1)-P_n(-1)=\sum\limits_{k=0}^{2n}(1-(-1)^k)a_k=\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant 2n,\ k \text{ impair}} 2a_k
\end{cases}$$

4. Montrons que

$$a_k-na_{k-1}+\binom{n}{2}a_{k-2}+\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}a_0=0 \text{ si } k \text{ n'est pas multiple de } 3$$

On est face à $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{n}{j}(-1)^j a_{k-j}$, d'où l'idée de développer

$$\begin{aligned}
(1-x)^n(1+x+x^2)^n &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{2n} a_j x^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{3n}\left(\sum_{i+j=k}(-1)^i\binom{n}{i}a_j\right)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{3n}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}a_{k-i}\right)x^k
\end{aligned}$$

Or $(1-x)(1+x+x^2) = 1+x+x^2-x-x^2-x^3 = 1-x^3$ et $(1-x^3)^n = \sum\limits_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}(-1)^\ell x^{3\ell}$. Par identification des coefficients,

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}a_{k-j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{0,3,\dots,3n\} \\ (-1)^\ell\binom{n}{\ell} & \text{si } k = 3\ell \text{ où } \ell \in \{0,1,\dots,n\} \end{cases}$$

Exercice 4 – principe des tiroirs

Énoncé 1
Énoncé modifié
On considère 17 mathématiciens qui travaillent sur au maximum 3 problèmes. 8 d'entre eux ne travaillent que sur un seul problème. Vérifier qu'il y a au moins 3 mathématiciens qui travaillent sur un seul et même problème.

Notons :

— n_1 le nombre de personnes qui traitent le problème P_1,

— n_2 le nombre de personnes qui traitent le problème P_2,

— n_3 le nombre de personnes qui traitent le problème P_3.

On a $n_1+n_2+n_3 = 8$. Raisonnons par l'absurde en supposant que tous les n_i valent au plus 2. Alors $n_1+n_2+n_3 \leqslant 6$, ce qui est impossible. Donc il existe i tel que $n_i \geqslant 3$.

Énoncé 2
Dix joueurs ont pris part à un tournoi d'échecs où chaque joueur doit jouer exactement une partie contre tous les autres joueurs. Un joueur marque 1 point s'il gagne un duel, il perd un point s'il perd le duel et 0 point clôt un duel avec match nul. À la fin du tournoi, on constate que plus de 70% se sont terminés par un match nul.
Montrons que deux joueurs ont le même score final.

Commençons par calculer le nombre de duels joués.

— Le joueur J_1 joue contre $J_2,\dots,J_{10}$,

— J_2 joue contre J_1 (déjà comptabilisé) et contre $J_3,\dots,J_{10}$,

— J_3 joue contre J_1, J_2 (déjà comptabilisé) et contre $J_4,\dots,J_{10}$,

— etc.

ce qui fait $9+8+7+\cdots+1 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$ duels.
Par hypothèse, au moins $\frac{70}{100}\times 45 = \frac{63}{2}$, soit au moins 32 duels sont des matchs nuls. Il reste $45-32 = 13$ duels qui voient une fin en victoire-défaite.

Raisonnons par l'absurde en supposant les 10 joueurs ont des scores totaux tous distincts. Il y en a au plus un qui a un score total nul, et donc au moins 9 qui doivent se partager les 13 duels avec victoire ou défaite.

$$\text{(nbre de joueurs dont le score final est } > 0) + \text{(nbre de joueurs dont le score final est } < 0) \geqslant 9$$

et l'un au moins de ces deux nombres vaut au moins 5 (sinon, on a la contradiction $4 + 4 < 9$).
Mettons que c'est le nombre de joueurs à score final strictement positif qui vaut au moins 5 (adaptez la rédaction dans l'autre cas de figure). Puisque les scores sont tous distincts, il y aura dans ces scores :

$$\underbrace{1+2+3+4+5}_{\text{dépasse strictement 13}}+\dots$$

et il y a strictement plus de 13 duels voyant une fin en défaite-victoire. C'est exclu.

Principe des tiroirs : Quand on range $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, deux chaussettes au moins se retrouvent dans le même tiroir.
On peut généraliser : par exemple, quand on range 50 chaussettes dans 4 tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient 13 chaussettes.
Démonstration par l'absurde : si tous les tiroirs contiennent au plus 12 chaussettes, alors on a au plus $4 \times 12 = 48$ chaussettes, ce qui est exclu.

Exercice 5 – tiré du concours général 2021

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \dots 2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

— on tire trois boules simultanément ;

— si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c, avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c puis on replace dans le sac la boule de numéro b ;

— on recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k, on note $\mathrm{P}(D_n = k)$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

I Étude des petits cas

1. On tire 3 boules dans $\{1, 2, 3\}$, on élimine les numéros extrêmes (0 et 2) et il reste donc 1. D_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1.
2. On prend l'urne $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. On tire 3 boules, on en enlève 2 (les deux extrêmes), il reste 3 boules et on en enlève 2 (les deux extrêmes).

Premier tirage	il restera	valeur prise par D_2
012	134	3
013	124	2
014	123	2
023	124	2
024	123	2
034	123	2
123	024	2
124	023	2
134	023	2
234	013	1

La loi de la variable aléatoire D_2 est donnée par :

$$\boxed{D_2(\Omega) = \{1,2,3\} \text{ et } \mathrm{P}(D_2=1) = \frac{1}{10} = \mathrm{P}(D_2=3) \text{ et } \mathrm{P}(D_2=2) = \frac{8}{10}}$$

II Valeurs extrêmes et symétrie

1. La boule numéro 0 est forcément tirée à un moment (au plus tard, au dernier tirage) et sera la plus petite du tirage donc sera écartée.
$\boxed{\mathrm{P}(D_n = 0) = 0}$
2. • Si c'est la boule 1 qui reste à la fin, il a fallu qu'au dernier tirage, on ait $0, 1$ et n'importe quelle autre boule. On est donc assuré que 0 n'a pas été prélevée avant (sinon, elle aurait la plus petite et aurait été écartée), et aussi que 1 n'a pas été prélevé non plus (sinon, il aurait aussi été le plus petit et aurait été écarté).
• Réciproquement, si 0 et 1 n'ont pas été prélevés avant le dernier tirage, alors ils sont tirés tous les deux au dernier tirage, et 1 se retrouve être en position intermédiaire et reste dans l'urne : D_n prend la valeur 1.

   Nous cherchons donc ici la probabilité que 0 et 1 ne soient tirés qu'au dernier tirage, et pas avant.
   - Au premier tirage, il y a $\binom{2n+1}{3}$ tirages équiprobables, dont $\binom{2n-1}{3}$ tirages sans le 0 et le 1. La probabilité de ne pas obtenir le 0 et le 1 au premier tirage est $\frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}}$
   - Au deuxième tirage, il y a $\binom{2n-1}{3}$ tirages équiprobables, dont $\binom{2n-3}{3}$ tirages sans le 0 et le 1. La probabilité de ne pas obtenir le 0 et le 1 au deuxième tirage est $\frac{\binom{2n-3}{3}}{\binom{2n-1}{3}}$
   - etc.
   - À l'avant-dernier tirage (le $(n-1)-$ième), il y a 5 boules dans l'urne, soit $\binom{5}{3}$ tirages équiprobables, dont $\binom{3}{3} = 1$ tirages sans le 0 et le 1. La probabilité de ne pas obtenir le 0 et le 1 à ce tirage est $\frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}}$.

   $$\mathrm{P}(D_n = 1) = \frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}} \times \frac{\binom{2n-3}{3}}{\binom{2n-1}{3}} \times \cdots \times \frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}}$$

   Les termes se simplifient deux par deux sauf le premier dénominateur et le dernier numérateur. Il reste $\frac{1}{\binom{2n+1}{3}} = \frac{3.2.1}{(2n+1)(2n)(2n-1)}$.
   $\boxed{\mathrm{P}(D_n = 1) = \frac{3}{n(2n+1)(2n-1)}}$
3. Soit i entier compris entre 0 et $2n$. On a $\mathrm{P}(D_n = i) = \mathrm{P}(D_n = 2n - i)$ pour des raisons de symétrie du rôle de i vis-à-vis de 0 par rapport au rôle de $2n - i$ vis-à-vis de $2n$, au sens où :
   - 0 joue vis-à-vis de la valeur minimale le même rôle que $2n$ à vis-à-vis du maximum, et l'expérience décrite accorde un rôle similaire au minimum et au maximum,

   $$\mathrm{P}(D_n = 0) = \mathrm{P}(D_n = 2n)$$

   - 1 joue vis-à-vis de la valeur minimale le même rôle que $2n - 1$ à vis-à-vis du maximum, et l'expérience décrite accorde un rôle similaire au minimum et au maximum,

   $$\mathrm{P}(D_n = 1) = \mathrm{P}(D_n = 2n - 1)$$

   - etc.

$\boxed{\text{Pour } i \text{ compris entre 0 et } 2n,\ \mathrm{P}(D_n = i) = \mathrm{P}(D_n = 2n - i).}$

4. Calculons l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n.
Le plus élégant :
Par la question précédente, pour i compris entre 0 et $2n$, $\mathrm{P}(D_n = i) = \mathrm{P}(2n - D_n = i)$, donc D_n et $2n - D_n$ suivent la même loi, et donc on la même espérance.

$$\mathrm{E}(D_n) = \mathrm{E}(2n - D_n)$$

et par linéarité de l'espérance (propriété $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$ pour a et b réels), on a $\mathrm{E}(2n - D_n) = 2n - \mathrm{E}(D_n)$, et en reportant dans l'égalité ci-dessus, $\mathrm{E}(D_n) = n$.

Ce que certains ont pensé :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(D_n) &= 0\mathrm{P}(D_n = 0) + 1\mathrm{P}(D_n = 1) + \cdots + (n-1)\mathrm{P}(D_n = n-1) + \\
&\quad n\mathrm{P}(D_n = n) + (n+1)\mathrm{P}(D_n = n+1) + \cdots + 2n\mathrm{P}(D_n = 2n) \\
&= (0 + 2n)\mathrm{P}(D_n = 0) + (1 + 2n - 1)\mathrm{P}(D_n = 1) + \cdots + \\
&\quad (n - 1 + n + 1)\mathrm{P}(D_n = n-1) + n\mathrm{P}(D_n = n) \\
&= 2n[\mathrm{P}(D_n = 0) + \cdots + \mathrm{P}(D_n = n-1)] + n\mathrm{P}(D_n = n) \\
&= n[2\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(D_n = k) + \mathrm{P}(D_n = n)] \\
&= n[\mathrm{P}(D_n = 0) + \mathrm{P}(D_n = 1) + \cdots + \mathrm{P}(D_n = n)] \text{ par 3.} \\
&= n \times 1
\end{aligned}$$

Ou enfin par le calcul :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(D_n) &= \sum_{i=1}^{2n-1} i\mathrm{P}(D_n = i) \\
&= \sum_{i=1}^{2n-1} i\mathrm{P}(D_n = 2n - i) \text{ par la question précédente} \\
&= \sum_{j=1}^{2n-1} (2n - j)\mathrm{P}(D_n = j) \text{ changement d'indice } j = 2n - i \\
&= 2n \sum_{j=1}^{2n-1} \mathrm{P}(D_n = j) - \sum_{j=1}^{2n-1} j\mathrm{P}(D_n = j) \\
&= 2n \times 1 - \mathrm{E}(D_n)
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{E}(D_n) = n}$