Méthode d'Euler pour la résolution numérique d'équations différentielles

Delphine Leroy

mise à jour octobre 2025

Lycée Camille PISSARRO

Motivation

Contexte : En MPSI, vous avez vu des méthodes de résolution pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, du second ordre à coefficients constants avec des seconds membres particuliers.
Mais pour de nombreuses équations différentielles, on ne dispose pas de méthode de résolution, et on n'a pas de formule donnant l'expression des solutions.

Motivation : **On veut ici trouver une solution approchée par calcul numérique.**

Idée d'Euler

Bilddaten gemeinfrei - Kunstmuseum Basel

Leonhard Euler (1707 - 1783)
Mathématicien et physicien suisse

Enseigna à Berlin, Saint-Pétersbourg

Phénoménal !
Fonctions, calcul infinitésimal, théorie des graphes, séries, théorie des nombres, géométrie du triangle...

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

On considère une équation différentielle ordinaire (pas de dérivées partielles) d'ordre 1. Par exemple, sur $[0, 3]$,

$$(E) : \begin{cases} y'(t) & = \frac{e^t}{1+t^3} y(t) \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

ou plus généralement,

$$\begin{cases} Y'(t) & = G(t, Y(t)) \\ Y(t_0) & = \text{ donné} \end{cases}$$

Idée d'Euler

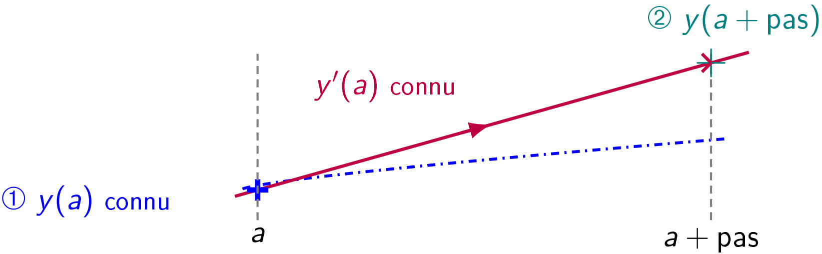
- Se donner un pas de travail ou, de manière équivalente, un nombre n de points de calculs.
  $n \times$ (pas) est la longueur de l'intervalle.
- Connaissant la solution à un instant a donné, effectuer une approximation, à l'aide de $y'(a)$ connu par (E), pour calculer y à l'instant $(a + \text{pas})$.
- Stocker le calcul précédente dans une liste.
- Réitérer n fois.

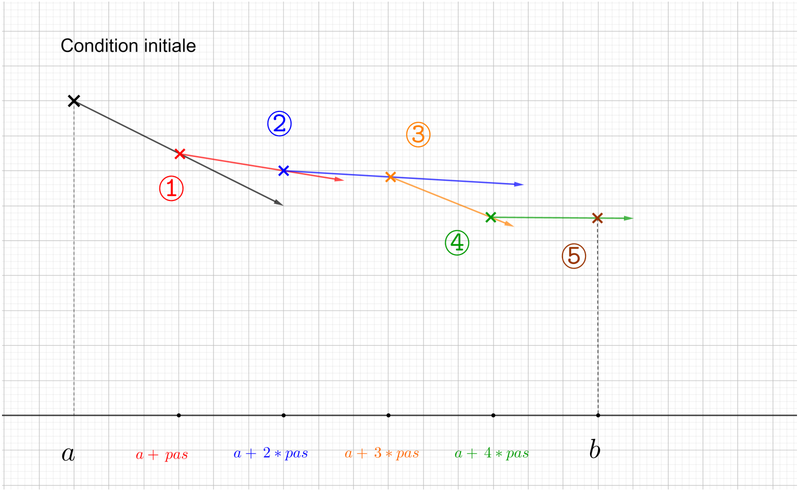
Méthode d'Euler explicite

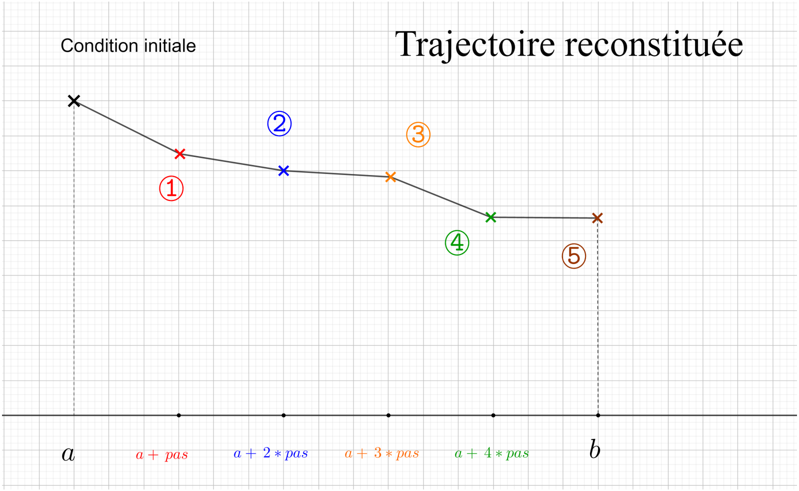
Méthode d'Euler explicite

On approche localement la fonction solution par sa tangente.

$$y(a + \text{pas}) \simeq y(a) + y'(a) \times \text{pas}$$

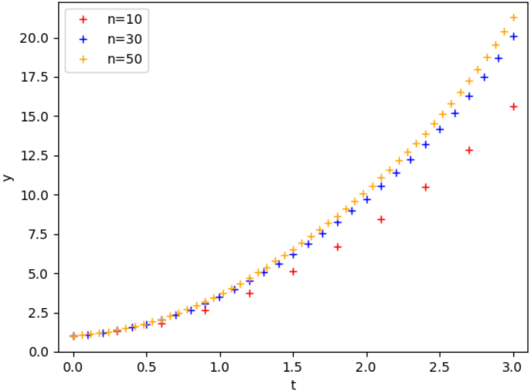



Condition initiale
①
②
③
④
⑤
a
$a + pas$
$a + 2 * pas$
$a + 3 * pas$
$a + 4 * pas$
b


Condition initiale
Trajectoire reconstituée
1
2
3
4
5
a
$a + pas$
$a + 2 * pas$
$a + 3 * pas$
$a + 4 * pas$
b

Application numérique sur $I = [0, 3]$ avec n points

Le pas est $1/n$.



EDO d'ordre 2

- La première étape consiste à passer sous forme **vectorielle** pour revenir à un **système différentiel d'ordre 1**.

- La première étape consiste à passer sous forme **vectorielle** pour revenir à un **système différentiel d'ordre 1**.
- Pour une EDO d'ordre 2, on pose $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. On a

  $\mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$.

- La première étape consiste à passer sous forme **vectorielle** pour revenir à un **système différentiel d'ordre 1**.
- Pour une EDO d'ordre 2, on pose $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$.
- La méthode d'Euler consiste à déterminer de proche en proche les $\mathrm{Y}(a)$ avec

$$\mathrm{Y}(a + pas) \; = \; \mathrm{Y}(a) + \mathrm{Y}'(a) * pas$$

Passage à l'ordre 1 – premier exemple

$$(E): \quad \begin{cases} y'' + 4y & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 2 \end{cases}$$

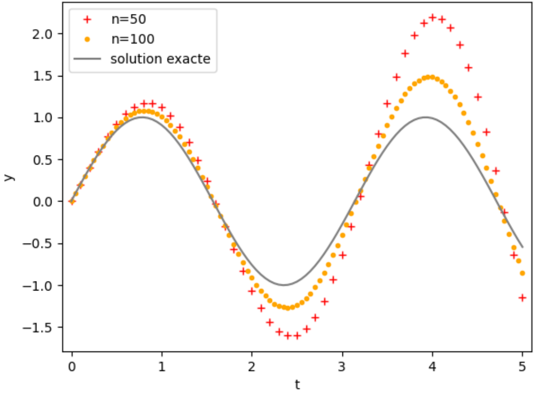
Avec $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Y}$ et $\mathrm{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ou, sous forme de système : $\begin{cases} Y_1'(t) & = Y_2(t) \\ Y_2'(t) & = -4Y_1(t) \end{cases}$

La méthode d'Euler consiste à déterminer de proche en proche les $\mathrm{Y}(a)$ avec

$$\mathrm{Y}(a + pas) \; = \; \mathrm{Y}(a) + \mathrm{Y}'(a) * pas$$

Résolution numérique sur $I = [0, 5]$ avec n points

Le pas est $1/n$.



Passage à l'ordre 1 – deuxième exemple

$$(E) : \quad \begin{cases} y'' + \sin^2(y) & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 3 \end{cases}$$

Avec $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et le système :

$$\begin{cases} Y_1'(t) & = Y_2(t) \\ Y_2'(t) & = -(\sin Y_1(t))^2 \end{cases}$$

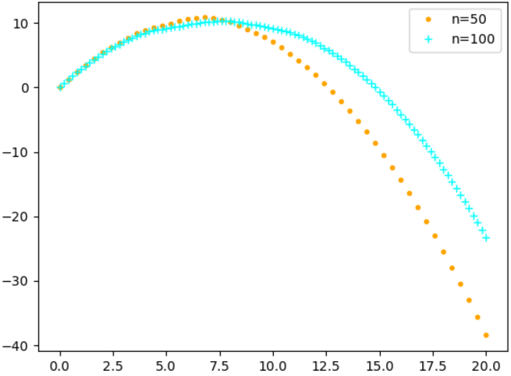
La méthode d'Euler consiste à déterminer de proche en proche

les $\mathrm{Y}(a)$ avec

$$\mathrm{Y}(a + pas) \; = \; \mathrm{Y}(a) + \mathrm{Y}'(a) * pas$$

Résolution numérique sur $I = [0, 20]$ avec n points

Le pas est $1/n$.



Pour vous entraîner

- Un petit TP sur une EDO à l'ordre 1 : TP CaPyTale
- Un petit TP sur une EDO à l'ordre 2 : TP CaPyTale
- Des exercices dans le livre *Informatique pour tous*, L. Moisan, au CDI (005 CAI i).

Champs de vecteurs et trajectoires

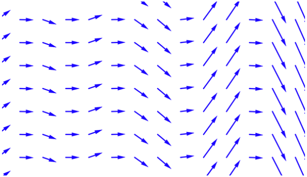
Dans la méthode d'Euler, l'idée de suivre la tangente en un point, où la tangente est dirigée par la vitesse, est primordiale.

Au chapitre Systèmes différentiels, nous reparlerons brièvement de l'utilisation de *champs de vecteurs* pour deviner des trajectoires. En voici un petit aperçu.

Imaginez un bouchon qui flotte sur une rivière.

©Benoît Rittaud

Il va suivre la trajectoire que lui impose le champ de vecteurs de l'écoulement d'eau de la rivière.



En chaque point, le vecteur *vitesse* de l'eau possède une direction, un sens, et une intensité (proportionnelle à la longueur de la flèche).

Pouvez-vous deviner sa trajectoire avec le champ de vecteurs ?

Trajectoire du bouchon