

EXERCICES À PRÉPARER AVANT D'ARRIVER EN COURS

Pour lundi 26

$\alpha > 0$ $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$u_n: \begin{pmatrix} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin^n x \cos^\alpha x \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur I .
- 2) Cette série de fonctions converge-t-elle normalement ?
- 3) Converge-t-elle uniformément ?

Pour mardi 27

Soit E un espace vectoriel euclidien et a, b deux vecteurs formant une famille libre de E .

$$\forall x \in E, f(x) = (a|x) b + (b|x) a$$

- 1) Déterminer le noyau et l'image de f .
- 2) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f . f est-elle diagonalisable ?

Pour lundi 2 juin

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, croissante et de limite $+\infty$.

Montrer que $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{an} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+an}$

Lou mardi 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables discrètes et $(X_n), (Y_n)$ des suites de variables aléatoires discrètes. On note $(*)$ la condition suivante:

$$(*) : \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$$

1) Soient x, y réels et $\varepsilon > 0$. Justifier l'implication:
 $|x+y| \geq \varepsilon \Rightarrow |x| \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ou } |y| \geq \frac{\varepsilon}{2}$

2) On suppose $(*)$. Établir:

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n + Y_n - (X+Y)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3) Application: Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$ avec $p \in [0, 1]$.
 $V_n = U_n + U_{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Montrer : } \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i - 2p \geq \varepsilon\right) = 0$$

4) (Question indépendante)

Soit X une variable aléatoire discrète. Établir:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X| > M) = 0$$