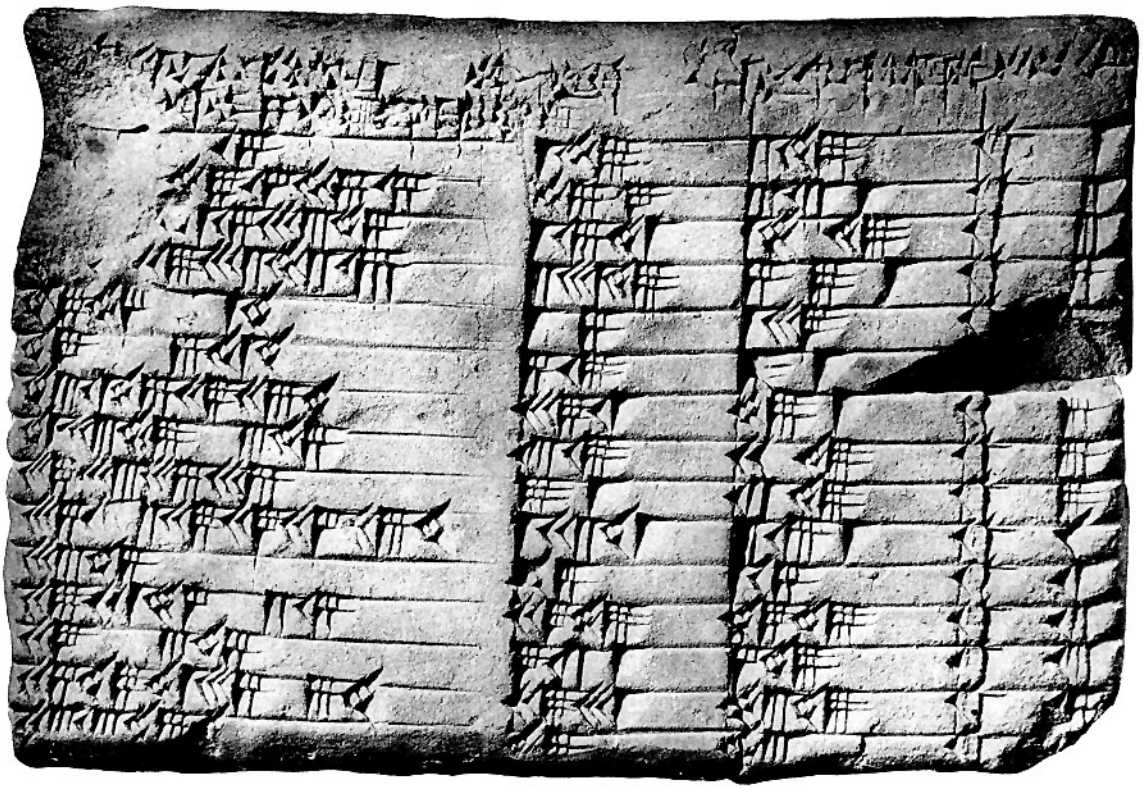
# Extrait du cahier de calcul

— Intégration —



*Plimpton 322*, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets $(a, b, c)$ de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

**Coordination**

Colas Bardavid

**Équipe des participants**

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

*Version 11 — 23 juin 2022*

# Énoncés

# Primitives

**Prérequis**
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

## Calculs directs

### Calcul 1.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ........................

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ........................

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ........................

d) $\sin(4t)$ ........................

### Calcul 1.2

Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ........................

b) $\mathrm{e}^{2t+1}$ ........................

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$ ........................

d) $\dfrac{1}{1+9t^2}$ ........................

## Utilisation des formulaires

### Calcul 1.3 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ........................

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ........................

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ........................

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ........................

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ........................

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ........................

### Calcul 1.4 — Dérivée d'une fonction composée – *bis*.

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ........................

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ ........................

c) $\dfrac{8\mathrm{e}^{2t}}{(3-\mathrm{e}^{2t})^3}$ ........................

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ........................

e) $\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t}$ ........................

f) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ........................

**Calcul 1.5 — Trigonométrie.**

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2 t \sin t$ .......

b) $\cos(t)\mathrm{e}^{\sin t}$ .......

c) $\tan t$ ............

d) $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ ........

e) $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ ...........

f) $\dfrac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ .......

g) $\tan^2 t$ ...........

h) $\tan^3 t$ ...........

i) $\dfrac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ ...........

j) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ...

k) $\dfrac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}$ .......

l) $\dfrac{\cos t}{(1-\sin t)^3}$ ......

m) $\dfrac{1}{1+4t^2}$ ..........

n) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ ..........

o) $\dfrac{\mathrm{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ .......

p) $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}\mathrm{Arcsin}(t)}$

**Calcul 1.6 — Trigonométrie – *bis.***

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\cos^2 t$ ............

b) $\cos(t)\sin(3t)$ ....

c) $\sin^3 t$ ............

d) $\dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$ .......

e) $\dfrac{1}{\sin t \cos t}$ ........

f) $\dfrac{1}{\sin^2(t)\cos^2(t)}$ ...

g) $\dfrac{1}{\sin(4t)}$ ..........

**Calcul 1.7 — Fractions rationnelles.**

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$ .......

b) $\dfrac{t^2+1}{t^3}$ ...........

c) $\dfrac{1-t^6}{1-t^2}$ ...........

d) $\dfrac{t^3+1}{t+1}$ ...........

e) $\dfrac{t-1}{t+1}$ ............

f) $\dfrac{t^3}{t+1}$ ............

g) $\dfrac{t-1}{t^2+1}$ ...........

h) $\dfrac{t}{(t+1)^2}$ .........

# Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

**Calcul 1.8**

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) $t^2 - 2t + 5$ .....

b) $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}$ .........

c) $\sqrt{t} - \dfrac{1}{t^3}$ ........

d) $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ .......

e) $\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-3t}$ ......

f) $\mathrm{e}^{3t-2}$ ..........

g) $\dfrac{t^2}{t^3-1}$ .........

h) $\dfrac{3t-1}{t^2+1}$ .........

i) $\sin(t)\cos^2(t)$ ... | o) $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos^2 t}$ ......

j) $\sinh(t)\cosh(t)$ .. | p) $te^{-t^2}$ ..........

k) $\dfrac{1}{t^2}\sin\dfrac{1}{t}$ ....... | q) $\dfrac{1-\ln t}{t}$ ........

l) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{2+\mathrm{e}^t}$ .......... | r) $\dfrac{1}{t\ln t}$ ..........

m) $\dfrac{\sin t}{2+3\cos t}$ ...... | s) $\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ ........

n) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ........ | t) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ .........

**Calcul 1.9** — ***Bis repetita.***

Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

**Réponses mélangées**

$\ln|t+1|+\dfrac{1}{t+1}$ $\quad 2\dfrac{3\cos^2 t-1}{(1+\cos^2 t)^2}$ puis $-\ln(1+\cos^2(t))$ $\quad \cos t(3\cos^2 t-2)$ puis $-\dfrac{1}{3}\cos^3 t$

$\dfrac{\ln t-2}{t^2}$ puis $\ln t-\dfrac{1}{2}\ln^2 t$ $\quad \dfrac{1}{4}\ln|\tan 2t|$ $\quad \ln|t+1|$ $\quad -\dfrac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$ puis $\dfrac{1}{3}\ln(|t^3-1|)$

$\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t|$ $\quad \sinh(t)^2+\cosh^2(t)$ puis $\dfrac{1}{2}\sinh^2(t)$ $\quad -\cos t+\dfrac{1}{3}\cos^3 t$ $\quad -\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$ $\quad -\dfrac{\cos(4t)}{4}$

$-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ $\quad \ln|t|-\dfrac{1}{2t^2}$ $\quad t-2\ln|t+1|$ $\quad \ln(1+\sin^2 t)$ $\quad \dfrac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3t)$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)-\mathrm{Arctan}(t)$

$\ln|\tan t|$ $\quad \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)$ $\quad t+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^5}{5}$ $\quad -\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}$ $\quad \dfrac{1}{2}\tan^2 t+\ln|\cos t|$ $\quad -2\cos\sqrt{t}$

$-\ln|1-\sin t|$ $\quad -\dfrac{3}{2(t+2)^2}$ $\quad 2\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{-3t}$ puis $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}$ $\quad \dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1-t^2}$

$\dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}$ $\quad t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\ln|t+1|$ $\quad -\dfrac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t}$ puis $\ln|\ln t|$ $\quad -\sqrt{1-t^2}$ $\quad \dfrac{1}{2}(\mathrm{Arcsin}(t))^2$

$-\dfrac{1}{\tan t}$ $\quad \dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$ $\quad \tan t-t$ $\quad \dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2t)$ $\quad \dfrac{1}{4}\tan^4 t$ $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{3}{t^4}$ puis $\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2t^2}$

$\dfrac{2\mathrm{e}^t}{(2+\mathrm{e}^t)^2}$ puis $\ln(2+\mathrm{e}^t)$ $\quad \mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)$ $\quad -\mathrm{cotan}t+\tan t$ $\quad -\ln|\cos t|$

$2(t-1)$ puis $\dfrac{1}{3}t^3-t^2+5t$ $\quad -\dfrac{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^{2t}-1)}{(1+\mathrm{e}^{2t})^2})$ puis $\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)$ $\quad 2\sqrt{\ln t}$ $\quad t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}$

$3\mathrm{e}^{3t-2}$ puis $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t-2}$ $\quad -\dfrac{2t\sin\frac{1}{t}+\cos\frac{1}{t}}{t^4}$ puis $\cos\dfrac{1}{t}$ $\quad \mathrm{e}^{\sin t}$ $\quad -\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right)$ puis $-\dfrac{1}{t}+\ln|t|$

$(1-2t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$ puis $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$ $\quad \dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)$ $\quad \dfrac{\cos\ln t-\sin\ln t}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t))$

$\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|$ $\quad \dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin(2t)}{4}$ $\quad -\dfrac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2}$ puis $\dfrac{3}{2}\ln(t^2+1)-\mathrm{Arctan}(t)$ $\quad -\dfrac{1}{3}\cos^3 t$

$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}$ $\quad t+\ln|t|-\dfrac{1}{t}$ $\quad 2\sqrt{\tan t}$ $\quad \dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}$ $\quad \dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$

$\ln|\mathrm{Arcsin}(t)|$ $\quad \dfrac{2\cos t+3}{(2+3\cos t)^2}$ puis $-\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|$ $\quad \dfrac{1}{4}\ln^4 t$ $\quad -\dfrac{\cos(4t)}{8}-\dfrac{\cos(2t)}{4}$

$-\dfrac{4}{t^5}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}$ $\quad \dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)$ $\quad -\dfrac{3}{t+2}$ $\quad \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}$

► Réponses et corrigés page 15

Fiche de calcul n° 2

# Calcul d'intégrales

**Prérequis**
Primitives usuelles, composées simples.

## Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de $f$ et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

### Calcul 2.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ .

b) $\displaystyle\int_{5}^{-3} |\sin 7x| \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{0}^{-1} \sin x \,\mathrm{d}x$ ...

### Calcul 2.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} 7 \,\mathrm{d}x$ ........

b) $\displaystyle\int_{7}^{-3} -5 \,\mathrm{d}x$ .....

c) $\displaystyle\int_{0}^{7} 3x \,\mathrm{d}x$ ......

d) $\displaystyle\int_{2}^{8} 1 - 2x \,\mathrm{d}x$ ..

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$ ......

## Calcul d'intégrales

On rappelle que si $F$ est une primitive de $f$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

### Calcul 2.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2 \,\mathrm{d}x$ ....................

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2x - 5 \,\mathrm{d}x$ ...............

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x$ ..........

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^5 - 5x^3 \,\mathrm{d}x$ ..........

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x$ .............

f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x$ ...............

### Calcul 2.4 — Fonctions usuelles.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \,\mathrm{d}x$ ...

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x$ ...

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ .........

d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ ...

e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ ......

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ .......

### Calcul 2.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \, \mathrm{d}x$ ............

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \, \mathrm{d}x$ ...............

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ .................

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \, \mathrm{d}x$ ............

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \, \mathrm{d}x$ ...........

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \mathrm{d}x$ .........

### Calcul 2.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \, \mathrm{d}x$ .........

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \, \mathrm{d}x$ ........

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x \, \mathrm{d}x$ ................

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5 \, \mathrm{d}x$ ........

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2-1} \, \mathrm{d}x$ ..............

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \, \mathrm{d}x$ ...........

### Calcul 2.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1} \, \mathrm{d}x$ ........

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \, \mathrm{d}x$ ..............

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x) \, \mathrm{d}x$ ..........

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$ ...........

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \, \mathrm{d}x$ .......

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| \, \mathrm{d}x$ .........

### Calcul 2.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin x \, \mathrm{d}x$ ...................

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ ....................

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \, \mathrm{d}x$ .......................

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{ch}(x) \, \mathrm{d}x$ .......................

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$ ........................

f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \, \mathrm{d}x$ .................

**Réponses mélangées**

$\frac{\sqrt{2}}{6}$ $0$ $78$ Négatif $0$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{7}{48}$ $2(\mathrm{e}^3-1)$ $\frac{147}{2}$ $\frac{5}{8}$ $8$ $0$

$50$ $\frac{99}{\ln 10}$ $\frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ $-\ln 3$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}+1}$

$-54$ Positif $-\frac{2}{101}$ $6$ $14$ $-\frac{1}{30}$ $18$ $\frac{\pi}{4}$ $\mathrm{e}^2$ $1$ $\frac{17}{2}$ $-2$

$\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3}$ Positif $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ $3\mathrm{e}-4$ $0$ $0$ $\frac{8}{3}$ $\frac{5}{2}$ $0$ $\frac{2\pi}{9}$ $-\frac{1}{384}$

► Réponses et corrigés page 18

Fiche de calcul n° 3

**011A**

# Intégration par parties

**Prérequis**

Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

## Intégrales

### Calcul 3.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t$ ....................

b) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t$ ............

c) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ......................

d) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ .....................

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ ......................

f) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t$ .....................

g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ................

h) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t$ ................

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t$ ..................

j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ..................

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ .........

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ..................

## Primitives

### Calcul 3.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ ..........

c) $x \longmapsto \arctan(x)$ ......

d) $x \longmapsto x\mathrm{ch}(x)$ .........

# Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

**Calcul 3.3 — Calcul d'intégrales.**

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ..............

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$ ......................

**Calcul 3.4 — Calcul de primitives.**

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \sin(x)\mathrm{sh}(x)$ ....

b) $x \longmapsto \ln^2 x$ ..........

c) $x \longmapsto (x\ln x)^2$ .......

d) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\arccos(x)}$ .......

**Réponses mélangées**

$4$ $\quad \begin{cases} ]-1,1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right) \end{cases}$ $\quad \dfrac{\pi}{2}-1$ $\quad \dfrac{5}{2}-\mathrm{e}^2$

$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x)+\sin(x)\mathrm{ch}(x)) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x} \end{cases}$ $\quad \dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2)-\dfrac{8}{9}\sqrt{2}+\dfrac{4}{9}$

$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x-\dfrac{2}{9}\ln x+\dfrac{2}{27}\right) \end{cases}$ $\quad \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$ $\quad \dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}$

$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}$ $\quad 1$ $\quad 2\ln 2-\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ $\quad \dfrac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}(2)-\dfrac{3}{2}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x-2x\ln x+2x \end{cases}$ $\quad \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi^2}{32}$

$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{4}{3}$ $\quad \ln(2)-2+\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\mathrm{sh}(x)-\mathrm{ch}(x) \end{cases}$

► Réponses et corrigés page 22

# Changements de variable

**Prérequis**
Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

## Changements de variable

### Calcul 4.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \sin\theta$ ........................................

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ........................................

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ........................................

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ........................................

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ........................................

f) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ........................................

### Calcul 4.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \cos t$ ........................................

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ........................................

c) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{t}{2} - 1$ ........................................

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \tan u$ ........................................

e) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{1}{t}$ ........................................

f) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$ ........................................

## Changements de variable et intégrations par parties

### Calcul 4.3

Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u=\sqrt{t}$ ..........

b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\big(\sqrt{t}-1\big)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u=\sqrt{t}$ ..........

## Calculs de primitives par changement de variable

### Calcul 4.4

Déterminer une primitive de $f$ en utilisant le changement de variable donné.

a) $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\longmapsto\dfrac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos^2 x}$ avec $u=\tan x$ ..........

b) $x\in\mathbb{R}\longmapsto\dfrac{1}{1+\mathrm{th}(x)}$ avec $u=\mathrm{e}^x$ ..........

c) $x\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$ avec $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$ ..........

d) $x\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$ avec $u=\sqrt[3]{x}$ ..........

e) $x>1\longmapsto\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ avec $u=\sqrt{x^2-1}$ ..........

**Réponses mélangées**

$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)$ $\qquad\dfrac{1}{4}$ $\qquad -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1)-4+2\sqrt{3}$ $\qquad\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

$\begin{cases}\mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto 2\arctan\big(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\big)\end{cases}$ $\qquad\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{8}$ $\qquad\begin{cases}]1,+\infty[ & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \arctan\sqrt{x^2-1}\end{cases}$ $\qquad\dfrac{\pi}{2}$

$\begin{cases}\mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1)\end{cases}$ $\qquad\dfrac{1}{12}$ $\qquad\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{x}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{4}\end{cases}$ $\qquad 2\arctan(\mathrm{e})-\dfrac{\pi}{2}$

$\begin{cases}\left]0,\frac{\pi}{2}\right[ & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \tan x+\ln\tan(x)\end{cases}$ $\qquad\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$ $\qquad\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad\dfrac{\pi}{12}$ $\qquad\dfrac{\pi}{6}$ $\qquad 2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $\qquad 2\mathrm{e}^2$

▶ Réponses et corrigés page 25

# Réponses et corrigés

# Fiche n° 1. Primitives

## Réponses

**1.1** a) ........ $\boxed{\ln|t+1|}$

**1.1** b) ........ $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

**1.1** c) ........ $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

**1.1** d) ........ $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

**1.2** a) ........ $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

**1.2** b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}}$

**1.2** c) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2t)}$

**1.2** d) ........ $\boxed{\dfrac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3t)}$

**1.3** a) ........ $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

**1.3** b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

**1.3** c) ........ $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

**1.3** d) ........ $\boxed{\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}}$

**1.3** e) ........ $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

**1.3** f) ........ $\boxed{-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}}$

**1.4** a) ........ $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4 t}$

**1.4** b) ........ $\boxed{2\sqrt{\ln t}}$

**1.4** c) ........ $\boxed{\dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}}$

**1.4** d) ........ $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

**1.4** e) ........ $\boxed{\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t|}$

**1.4** f) ........ $\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}$

**1.5** a) ........ $\boxed{-\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

**1.5** b) ........ $\boxed{\mathrm{e}^{\sin t}}$

**1.5** c) ........ $\boxed{-\ln|\cos t|}$

**1.5** d) ........ $\boxed{-\ln|1-\sin t|}$

**1.5** e) ........ $\boxed{-2\cos\sqrt{t}}$

**1.5** f) ........ $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)}$

**1.5** g) ........ $\boxed{\tan t - t}$

**1.5** h) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t|}$

**1.5** i) ........ $\boxed{\dfrac{1}{4}\tan^4 t}$

**1.5** j) ........ $\boxed{2\sqrt{\tan t}}$

**1.5** k) ........ $\boxed{-\dfrac{1}{\tan t}}$

**1.5** l) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}}$

**1.5** m) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)}$

**1.5** n) ........ $\boxed{\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)}$

**1.5** o) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}(\mathrm{Arcsin}(t))^2}$

**1.5** p) ........ $\boxed{\ln|\mathrm{Arcsin}(t)|}$

**1.6** a) ........ $\boxed{\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(2t)}{4}}$

**1.6** b) ........ $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{8} - \dfrac{\cos(2t)}{4}}$

**1.6** c) ........ $\boxed{-\cos t + \dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

**1.6** d) ........ $\boxed{\ln(1+\sin^2 t)}$

**1.6** e) ........ $\boxed{\ln|\tan t|}$

**1.6** f) ........ $\boxed{-\mathrm{cotan} t + \tan t}$

**1.6** g) ........ $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln|\tan 2t|}$

**1.7** a) ........ $\boxed{t + \ln|t| - \dfrac{1}{t}}$

**1.7** b) ........ $\boxed{\ln|t| - \dfrac{1}{2t^2}}$

**1.7** c) ........ $\boxed{t + \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5}}$

**1.7** d) ........ $\boxed{t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3}}$

**1.7** e) ........ $\boxed{t - 2\ln|t+1|}$

**1.7** f) ........ $\boxed{t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \ln|t+1|}$

**1.7** g) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) - \operatorname{Arctan}(t)}$

**1.7** h) ........ $\boxed{\ln|t+1| + \dfrac{1}{t+1}}$

**1.8** a) ........ $\boxed{2(t-1) \text{ puis } \dfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t}$

**1.8** b) ........ $\boxed{-\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right) \text{ puis } -\dfrac{1}{t} + \ln|t|}$

**1.8** c) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{t}} + \dfrac{3}{t^4} \text{ puis } \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2t^2}}$

**1.8** d) ........ $\boxed{-\dfrac{4}{t^5} - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}} \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3} - \dfrac{2}{\sqrt{t}}}$

**1.8** e) ........ $\boxed{2e^{2t} - 3e^{-3t} \text{ puis } \dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{3}e^{-3t}}$

**1.8** f) ........ $\boxed{3e^{3t-2} \text{ puis } \dfrac{1}{3}e^{3t-2}}$

**1.8** g) ........ $\boxed{-\dfrac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2} \text{ puis } \dfrac{1}{3}\ln(|t^3-1|)}$

**1.8** h) ........ $\boxed{-\dfrac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2} \text{ puis } \dfrac{3}{2}\ln(t^2+1) - \operatorname{Arctan}(t)}$

**1.8** i) ........ $\boxed{\cos t(3\cos^2 t - 2) \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

**1.8** j) ........ $\boxed{\sinh(t)^2 + \cosh^2(t) \text{ puis } \dfrac{1}{2}\sinh^2(t)}$

**1.8** k) ........ $\boxed{-\dfrac{2t\sin\frac{1}{t} + \cos\frac{1}{t}}{t^4} \text{ puis } \cos\dfrac{1}{t}}$

**1.8** l) ........ $\boxed{\dfrac{2e^t}{(2+e^t)^2} \text{ puis } \ln(2+e^t)}$

**1.8** m) ........ $\boxed{\dfrac{2\cos t + 3}{(2+3\cos t)^2} \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|}$

**1.8** n) ........ $\boxed{\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \text{ puis } -\sqrt{1-t^2}}$

**1.8** o) ........ $\boxed{2\dfrac{3\cos^2 t - 1}{(1+\cos^2 t)^2} \text{ puis } -\ln(1+\cos^2(t))}$

**1.8** p) ........ $\boxed{(1-2t^2)e^{-t^2} \text{ puis } -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}}$

**1.8** q) ........ $\boxed{\dfrac{\ln t - 2}{t^2} \text{ puis } \ln t - \dfrac{1}{2}\ln^2 t}$

**1.8** r) ........ $\boxed{-\dfrac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t} \text{ puis } \ln|\ln t|}$

**1.8** s) ........ $\boxed{\dfrac{\cos\ln t - \sin\ln t}{t^2} \text{ puis } -\cos(\ln t))}$

**1.8** t) ........ $\boxed{-\dfrac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2}) \text{ puis } \operatorname{Arctan}(e^t)}$

## Corrigés

**1.1** a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

**1.1** b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

**1.1** c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

**1.1** d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

**1.2** a) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

**1.2** b) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

**1.2** c) Admet des primitives sur $]-1/2,1/2[$.

**1.2** d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

**1.5** g) $\displaystyle\int^t \tan^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t ((1+\tan^2\theta)-1)\,\mathrm{d}\theta = \tan t - t + \text{cte}$

**1.5** h) $\displaystyle\int^t \tan^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t ((\tan^2\theta+1)\tan\theta - \tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t| + \text{cte}$

**1.6** a) $\displaystyle\int^x \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \text{cte}$

**1.6** b) On a

$$\begin{aligned}\int^t \cos(\theta)\sin(3\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(3\theta+\theta)+\sin(3\theta-\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(4\theta)+\sin(2\theta))\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4} + \text{cte}.\end{aligned}$$

**1.6** c) $\displaystyle\int^t \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \text{cte}$

**1.6** d) $\displaystyle\int^t \frac{\sin(2\theta)}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \ln(1+\sin^2 t) + \text{cte}$

**1.6** e) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int^t \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + \text{cte} = \ln|\tan t| + \text{cte}$

**1.6** f) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)} = \int^t \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = -\text{cotan}(t) + \tan(t) + \text{cte}$

**1.6** g) On a

$$\begin{aligned}\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(4\theta)} &= \int^t \frac{\cos^2(2\theta)+\sin^2(2\theta)}{2\sin(2\theta)\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{4}\left(\frac{2\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} + \frac{2\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\ln|\sin(2t)| - \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)| + \text{cte} = \frac{1}{4}\ln|\tan 2t| + \text{cte}.\end{aligned}$$

**1.7** c) On a $1-t^6 = 1^3 - (t^2)^3 = (1-t^2)(1+t^2+t^4)$ donc finalement on cherche une primitive de $1+t^2+t^4$.

**1.7** e) $\displaystyle\int^t \frac{\theta-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-2}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(1 - \frac{2}{\theta+1}\right)\mathrm{d}\theta = t - 2\ln|t+1| + \text{cte}$

**1.7** f) $\displaystyle\int^t \frac{\theta^3}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta^3+1-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{(\theta+1)(1-\theta+\theta^2)-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln|t+1| + \text{cte}$

**1.7** h) $\displaystyle\int^t \frac{\theta}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-1}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\theta+1} - \frac{1}{(\theta+1)^2}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \text{cte}$

# Fiche n° 2. Calcul d'intégrales

## Réponses

**2.1** a) ......... $\boxed{\text{Positif}}$

**2.1** b) ........ $\boxed{\text{Négatif}}$

**2.1** c) ......... $\boxed{\text{Positif}}$

**2.2** a) ............. $\boxed{14}$

**2.2** b) ............. $\boxed{50}$

**2.2** c) ........... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

**2.2** d) ........... $\boxed{-54}$

**2.2** e) .............. $\boxed{0}$

**2.2** f) .............. $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

**2.3** a) .............. $\boxed{8}$

**2.3** b) ............ $\boxed{-2}$

**2.3** c) .............. $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

**2.3** d) .............. $\boxed{0}$

**2.3** e) ........... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

**2.3** f) .......... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

**2.4** a) ............. $\boxed{0}$

**2.4** b) ............. $\boxed{1}$

**2.4** c) ............. $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

**2.4** d) ............ $\boxed{18}$

**2.4** e) ....... $\boxed{e^2 - e^{-3}}$

**2.4** f) .......... $\boxed{-\ln 3}$

**2.5** a) ............ $\boxed{78}$

**2.5** b) ...... $\boxed{2(e^3 - 1)}$

**2.5** c) ... $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

**2.5** d) .......... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

**2.5** e) ............. $\boxed{6}$

**2.5** f) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

**2.6** a) ............. $\boxed{0}$

**2.6** b) ............. $\boxed{0}$

**2.6** c) ...... $\boxed{\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}$

**2.6** d) ......... $\boxed{-\dfrac{1}{384}}$

**2.6** e) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)}$

**2.6** f) ............ $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

**2.7** a) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e+1}}$

**2.7** b) ........... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

**2.7** c) ............. $\boxed{e^2}$

**2.7** d) ......... $\boxed{3e - 4}$

**2.7** e) ........... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

**2.7** f) ............. $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

**2.8** a) ............. $\boxed{0}$

**2.8** b) ............ $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

**2.8** c) .......... $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

**2.8** d) ........ $\boxed{\dfrac{e - \frac{1}{e}}{2}}$

**2.8** e) ............. $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

**2.8** f) ........... $\boxed{\dfrac{2\pi}{9}}$

## Corrigés

**2.1** a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

**2.1** b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin 7x|\,dx = -\int_{-3}^{5} |\sin 7x|\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

**2.1** c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin x\,dx = -\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$ est donc négative.

**2.2** a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

**2.2** b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,dx = -\int_{-3}^{7} -5\,dx = \int_{-3}^{7} 5\,dx$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

**2.2** c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine $O$, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en $A$ et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

**2.2** d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\frac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

**2.2 e)** Avec la relation de Chasles, on a $\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sin x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\int_{-2}^{0} \sin x \,\mathrm{d}x$ et $\int_{0}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

**2.2 f)** Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de $-2$ à 0 et de 0 à 1).

**2.3 a)** Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

**2.3 b)** $\int_{1}^{3} 2x - 5 \,\mathrm{d}x = \Big[x^2 - 5x\Big]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$

**2.3 c)** $\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\Big]_{-2}^{0} = 0 - \Big(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\Big) = \frac{8}{3}.$

**2.3 d)** La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

**2.3 e)** $\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

**2.3 f)** $\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{101}x^{101}\Big]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$

**2.4 a)** La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

**2.4 b)** $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = 1.$

**2.4 c)** $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

**2.4 d)** $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100} = 18.$

**2.4 e)** $\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}.$

**2.4 f)** $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$

**2.5 a)** $\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{8}(2x+1)^4\Big]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$

**2.5 b)** $\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x = \Big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\Big]_{-2}^{4} = 2(\mathrm{e}^3 - 1).$

**2.5 c)** $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \Big[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\Big]_0^1 = \frac{1}{\pi}\ln\Big(\frac{\pi+2}{2}\Big).$

**2.5 d)** $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{3}\cos(3x)\Big]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

**2.5** e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

........................................................................

**2.5** f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

........................................................................

**2.6** a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)\right]_1^3 = 0.$

........................................................................

**2.6** b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

........................................................................

**2.6** c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

........................................................................

**2.6** d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

........................................................................

**2.6** e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

........................................................................

**2.6** f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\frac{-1}{3}\,\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

........................................................................

**2.7** a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + \frac{1}{2}.$

........................................................................

**2.7** b) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} x+1\,\mathrm{d}x.$
Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

........................................................................

**2.7** c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

........................................................................

**2.7** d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x - 2\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3(\mathrm{e}-1) - 2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}-4.$

........................................................................

**2.7** e) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

........................................................................

**2.7** f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left|\frac{1}{2}\sin(2x)\right|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x$. Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ et positif sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} -\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} - \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

........................................................................

**2.8** a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

........................................................................

**2.8** b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

........................................................................

**2.8** c) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

**2.8** d) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{sh}(x)\Big]_0^1 = \mathrm{sh}(1) = \frac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2}.$

**2.8** e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

**2.8** f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{3}\arctan(3x)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\arctan(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$

# Fiche nº 3. Intégration par parties

## Réponses

**3.1** a) ........ $\boxed{\dfrac{\pi}{2}-1}$

**3.1** b) ........ $\boxed{\dfrac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}(2)-\dfrac{3}{2}}$

**3.1** c) ........ $\boxed{4}$

**3.1** d) ........ $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}}$

**3.1** e) ........ $\boxed{1}$

**3.1** f) ........ $\boxed{2\ln 2-\dfrac{3}{4}}$

**3.1** g) ........ $\boxed{\ln(2)-2+\dfrac{\pi}{2}}$

**3.1** h) ........ $\boxed{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}}$

**3.1** i) ........ $\boxed{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}$

**3.1** j) ........ $\boxed{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{4}{3}}$

**3.1** k) ........ $\boxed{\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2)-\dfrac{8}{9}\sqrt{2}+\dfrac{4}{9}}$

**3.1** l) ........ $\boxed{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi^2}{32}}$

**3.2** a) ........ $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x\end{cases}}$

**3.2** b) ........ $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x}\end{cases}}$

**3.2** c) ........ $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x\arctan(x)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{cases}}$

**3.2** d) ........ $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x\mathrm{sh}(x)-\mathrm{ch}(x)\end{cases}}$

**3.3** a) ........ $\boxed{\dfrac{5}{2}-\mathrm{e}^2}$

**3.3** b) ........ $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}}$

**3.4** a) ........ $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x)+\sin(x)\mathrm{ch}(x))\end{cases}}$

**3.4** b) ........ $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x\ln^2 x-2x\ln x+2x\end{cases}}$

**3.4** c) ........ $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x-\dfrac{2}{9}\ln x+\dfrac{2}{27}\right)\end{cases}}$

**3.4** d) ........ $\boxed{\begin{cases}]-1,1[ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\end{cases}}$

## Corrigés

**3.1 a)** On choisit $u'(t)=\cos t$ et $v(t)=t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t=[t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-1.$

**3.1 b)** On choisit $u'(t)=\mathrm{sh}(2t)$ et $v(t)=2t+3$. $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t=\left[(2t+3)\frac{\mathrm{ch}(2t)}{2}\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{ch}(2t)\,\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\frac{3}{2}-\frac{\mathrm{sh}(2)}{2}.$

**3.1 c)** On choisit $v(t)=t$ et $u'(t)=\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$. $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\left[2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2-2\int_0^2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=4e-4\left[\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2=4.$

**3.1 d)** On choisit $v(t)=t$ et $u'(t)=2^t$. $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} t2^t\,\mathrm{d}t=\int_1^{\ln(2)} t\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t=\left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)}\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t=2^{\ln(2)}-\frac{2}{\ln(2)}-\frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)}=\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}.$

**3.1 e)** On choisit $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln t\,\mathrm{d}t=[t\ln t]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}1\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$

**3.1 f)** On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^2 t \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t \,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

**3.1 g)** On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

**3.1 h)** On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t \arctan t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

**3.1 i)** On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arcsin t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t \,\mathrm{d}t = [t \arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$.

**3.1 j)** On choisit $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\sqrt{1+t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$.

**3.1 k)** On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$.

**3.1 l)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\left(1 + \tan^2 t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \,\mathrm{d}t$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1 + \tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t \tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \,\mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

**3.2 a)** Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x (-t+1)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[(-t+1)\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = (-x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$.

**3.2 b)** Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f$

**3.2 c)** La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = [t \arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

**3.2 d)** La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en choisissant $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{ch}t$, $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = [t\mathrm{sh}(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) + 1$. D'où une primitive.

**3.3 a)** On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = t^2 + 3t - 4$ et ainsi $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+3t-4)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t+3$ et $u'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ d'où :$\displaystyle -\int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = 2 - \left[(2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{11}{4} - \frac{5}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 = \frac{5}{2} - \mathrm{e}^2$.

**3.3** b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$ ; d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos t \,\mathrm{d}t$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\mathrm{e}^t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t$. Finalement, $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

---

**3.4** a) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$. On commence par choisir $u' = \sin$ et $v = \mathrm{sh}$ cela donne $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)\mathrm{sh}(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$. Puis, on choisit $u' = \cos$ et $v = \mathrm{ch}$, ce qui donne $-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + [\sin(t)\mathrm{ch}(t)]_0^x - \displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + \sin(x)\mathrm{ch}(x))$.

---

**3.4** b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\displaystyle\int_1^x \ln^2 t \,\mathrm{d}t = \left[t \ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2 \ln t \,\mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $x \ln^2 x - 2[t \ln t]_1^x + 2\displaystyle\int_1^x 1 \,\mathrm{d}t = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

---

**3.4** c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\displaystyle\int_1^x t^2 \ln^2 t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} \ln^2 t\right]_1^x - \frac{2}{3}\int_1^x t^2 \ln t \,\mathrm{d}t$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\dfrac{x^3}{3} \ln^2 x - \dfrac{2}{9}\left[t^3 \ln t\right]_1^x + \dfrac{2}{9}\displaystyle\int_1^x t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}(x^3 - 1)$. D'où une primitive.

---

**3.4** d) La fonction est définie et continue sur $]-1,1[$. Si $x \in ]-1,1[$, alors, en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t$, ensuite, en posant $u'(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \left[\sqrt{1-t^2}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x + \displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\arccos(x)} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t$. D'où $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

---

# Fiche n° 4. Changements de variable

## Réponses

**4.1** a) ........ $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

**4.1** b) ........ $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

**4.1** c) ........ $\boxed{2\arctan(\mathrm{e}) - \dfrac{\pi}{2}}$

**4.1** d) ........ $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

**4.1** e) ........ $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

**4.1** f) ........ $\boxed{2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

**4.2** a) ........ $\boxed{\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

**4.2** b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)}$

**4.2** c) ........ $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

**4.2** d) ........ $\boxed{\dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}}$

**4.2** e) ........ $\boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

**4.2** f) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}}$

**4.3** a) ........ $\boxed{2\mathrm{e}^2}$

**4.3** b) ........ $\boxed{-2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}}$

**4.4** a) ........ $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x + \ln\tan(x) \end{array}\right.}$

**4.4** b) ........ $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} \end{array}\right.}$

**4.4** c) ........ $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\right) \end{array}\right.}$

**4.4** d) ........ $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{array}\right.}$

**4.4** e) ........ $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} ]1, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\sqrt{x^2 - 1} \end{array}\right.}$

## Corrigés

**4.1 a)** On pose $t = \sin\theta$ avec $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$ et donc

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

........................................................................................................................

**4.1 b)** On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,3]$, donc $t = u^2$ et $u \in \left[1, \sqrt{3}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ et donc $dt = 2udu$. Ainsi,

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u+u^3}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

........................................................................................................................

**4.1 c)** On pose $u = \mathrm{e}^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1, \mathrm{e}]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ et donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$. On obtient

$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{u+\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u} = 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_1^{\mathrm{e}} = 2\arctan(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{2}.$$

........................................................................................................................

**4.1 d)** On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cos t$ et donc $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t$.
Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

........................................................................................................................

**4.1 e)** Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1-\sin^2 t)\cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cos t$ donc $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

---

**4.1 f)** On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\ln(1+u)\Big]_1^2 = 2(\ln(3)-\ln(2))$.

---

**4.2 a)** On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0,\pi]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin t$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{3+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et finalement,

$\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

---

**4.2 b)** On pose $u = \mathrm{e}^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1,\mathrm{e}]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2+\frac{1}{u}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)$.

---

**4.2 c)** On pose $u = \dfrac{1}{2}t - 1$ avec $t \in [2,4]$, donc $t = 2u+2$ et $u \in [0,1]$. On a donc $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-4u^2}}\,\mathrm{d}u = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

---

**4.2 d)** On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = (1+\tan^2 u)$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

---

**4.2 e)** On pose $u = \dfrac{1}{t}$ avec $t \in \left[\sqrt{2}, 2\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = -\dfrac{1}{u^2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = -\Big[\arcsin u\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}$.

---

**4.2 f)** On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [\mathrm{e},\ \mathrm{e}^2]$, donc $t = \mathrm{e}^u$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^u$ et

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

---

**4.3 a)** On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1,2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\displaystyle\int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \Big[2u\mathrm{e}^u\Big]_1^2 - \int_1^2 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^2$.

---

**4.3 b)** On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3}, 2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u-1)}{u}2u\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u = 2\Big[(u-1)\ln(u-1)\Big]_{\sqrt{3}}^2 - 2\int_{\sqrt{3}}^2 \mathrm{d}u = -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}.$$

---

**4.4 a)** La fonction est bien continue. Soit $(a,x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$.

On calcule $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t} \, \mathrm{d}t$ qui est aussi $\displaystyle\int_a^x \frac{1 + \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t} \, \mathrm{d}t$ en posant $u = \tan t$.

On a $\dfrac{1}{\cos^2 t} \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et, ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t} \, \mathrm{d}t = \int_{\tan a}^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u = \Big[u + \ln u\Big]_{\tan a}^{\tan x} = \tan x + \ln \tan(x) + C.$

---

**4.4 b)** Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 + \mathrm{th}(t)} \, \mathrm{d}t$ dans laquelle on pose $u = \mathrm{e}^t$ c'est-à-dire $t = \ln u$. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ et ainsi

$$\int_0^x \frac{1}{1 + \mathrm{th}(t)} \, \mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1 + \frac{u - \frac{1}{u}}{u + \frac{1}{u}}} \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^3} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{4} \frac{1}{u^2}\right]_1^{\mathrm{e}^x} = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} + C.$$

On pouvait aussi faire sans changement de variable en écrivant, pour $t \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{1 + \mathrm{th}(t)} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}} = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2\mathrm{e}^t} = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2t}).$$

---

**4.4 c)** La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, on a $t = \ln(1 + u^2)$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{2u}{1 + u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}} \, \mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\mathrm{e} - 1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \frac{1}{u} \frac{2u}{1 + u^2} \, \mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} = 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}) + C.$

---

**4.4 d)** La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t + \sqrt[3]{t}} \, \mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3 + u} \, \mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2 + 1} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{3}{2} \ln(u^2 + 1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C.$$

---

**4.4 e)** La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ donne $t = \sqrt{u^2 + 1}$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} \, \mathrm{d}t = \int_{\sqrt{a^2 - 1}}^{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2 + 1}} \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \, \mathrm{d}u = \int_{\sqrt{a^2 - 1}}^{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{1}{u^2 + 1} \, \mathrm{d}u = \arctan \sqrt{x^2 - 1} + C.$$

---