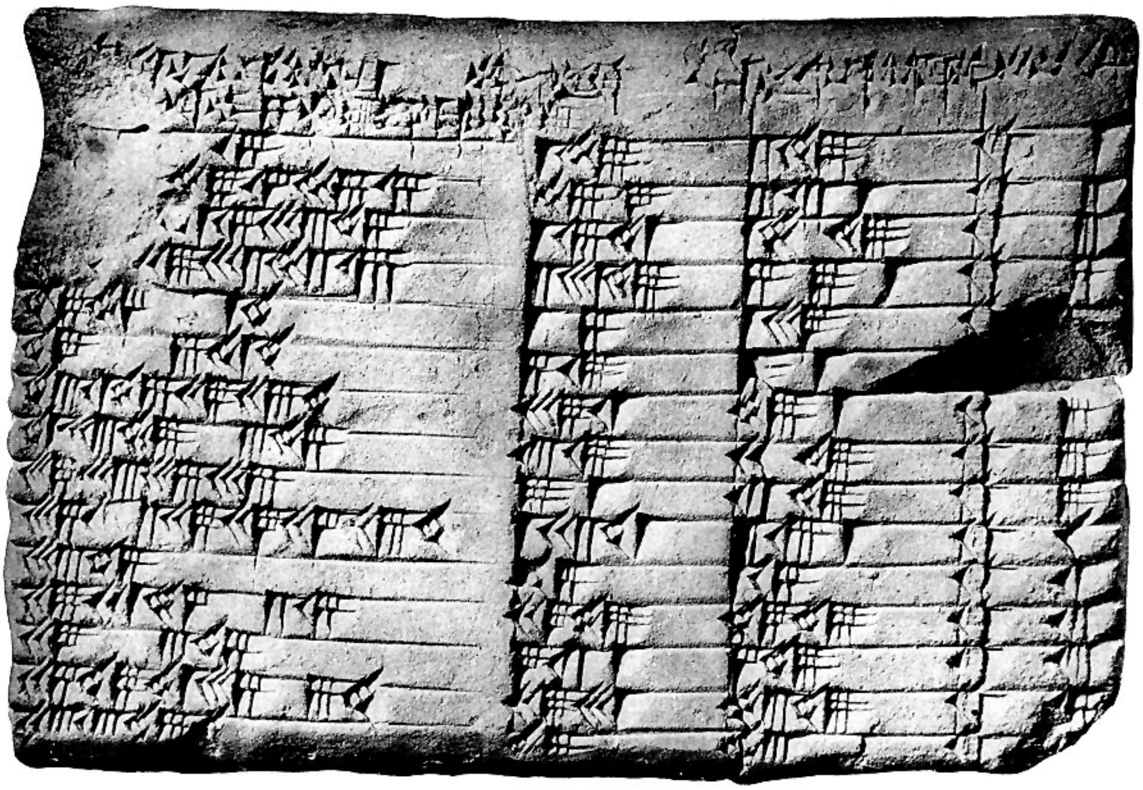
Extrait du cahier de calcul

— Décomposition en éléments simples —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version 11 — 23 juin 2022

Énoncés

Décomposition en éléments simples

Prérequis
Polynômes (factorisation, division euclidienne), primitives usuelles

Calculs de décompositions en éléments simples

Calcul 1.1 — Uniquement des pôles simples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X^4 - 2}{X(X+1)(X+2)}$ ....

b) $\dfrac{X^3 + 2}{(X-1)X(X+1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$ ....

Calcul 1.2

Même exercice.

a) $\dfrac{X+1}{(X+2)(X+\mathrm{e})}$ ....

b) $\dfrac{X^2 + X + 1}{(X-i)(X+i)(X-1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2 + 2}{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})}$ ....

Calcul 1.3 — Avec des pôles multiples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}$ ..

b) $\dfrac{2 + X^2}{(X+1)X^2(X-1)^2}$ ....

c) $\dfrac{1-X}{X(X+\pi)^2}$ ....

d) $\dfrac{1}{(X-i)^2(X-1-i)^2}$ ......

Calcul 1.4 — À vous de factoriser.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X-3}{X^4-1}$ ....

b) $\dfrac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$ ....

Calcul 1.5 — Calculs de sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Calculer les sommes suivantes, après avoir fait une décomposition en éléments simples de leur terme général.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$.

Calcul 1.6 — Calculs de sommes.

Effectuer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)}$ ....

b) $\dfrac{3}{(X-1)(X+1)(X^2+X+1)}$ ....

Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

Calcul 1.7 — Pôles simples ou multiples.

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ .....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 1.8 — Primitives.

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2}$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ ....

e) $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+2x+3}$ ....

f) $x \longmapsto \dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)(x+1)}$ ....

g) $x \longmapsto \dfrac{x}{(x^2+2)(x+1)}$ ....

h) $x \longmapsto \dfrac{x-2}{(x+1)^2(x-1)^2}$ ....

Réponses mélangées

$-\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{2}{3}\ln(2)$ $\qquad$ $\frac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3)$ $\qquad$ $1-2\ln(3)$ $\qquad$ $1+\frac{\pi}{2(X-\pi)}-\frac{\pi}{2(X+\pi)}$

2 $\qquad$ $\frac{2}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{1-2X}{X^2+1}$ $\qquad$ $\frac{1}{\pi^2 X}-\frac{1}{\pi^2(X+\pi)}-\frac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{8}$

$\frac{1}{2X}+\frac{5}{6(X+2)}+\frac{2}{3(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}.$ $\qquad$ $\frac{2}{X}+\frac{2}{X^2}-\frac{11}{4(X-1)}+\frac{3}{2(X-1)^2}+\frac{3}{4(X+1)}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ $\qquad$ $-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2(X-1)}-\frac{1+3i}{4(X-i)}-\frac{1-3i}{4(X+i)}$

$X-3-\frac{1}{X}+\frac{1}{X+1}+\frac{7}{X+2}$ $\qquad$ $x\mapsto\frac{1}{4(1-2x)^2}$ $\qquad$ $\frac{1}{18}-\frac{1}{9}\ln(5)+\frac{2}{9}\ln(2)$

$\frac{2}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{2}{X-(1+i)}+\frac{1}{(X-(1+i))^2}$ $\qquad$ $1-\frac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(X+\sqrt{3})}-\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}$

$\frac{3}{2(X-1)}-\frac{1+i}{4(X-i)}-\frac{1-i}{4(X+i)}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\frac{-3}{X-2}+\frac{1}{X-3}+\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{4}\ln(3)$ $\qquad$ $x\mapsto\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$

$\frac{1}{2(X-1)}-\frac{3}{2(X+1)}+\frac{X-1}{X^2+X+1}$ $\qquad$ $\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4}$ $\qquad$ $1-\frac{2}{X}+\frac{1}{2(X+1)}+\frac{3}{2(X-1)}$

$\frac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})}+\frac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}$ $\qquad$ $x\mapsto\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|$ $\qquad$ $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{16}{3}\ln|x-2|$

► Réponses et corrigés page 9

Réponses et corrigés

Fiche nº 1. Décomposition en éléments simples

Réponses

1.1 a) $X-3-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{7}{X+2}$

1.1 b) $1-\dfrac{2}{X}+\dfrac{1}{2(X+1)}+\dfrac{3}{2(X-1)}$

1.1 c) $1+\dfrac{\pi}{2(X-\pi)}-\dfrac{\pi}{2(X+\pi)}$

1.2 a) $\dfrac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})}+\dfrac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}$

1.2 b) $\dfrac{3}{2(X-1)}-\dfrac{1+i}{4(X-i)}-\dfrac{1-i}{4(X+i)}$

1.2 c) $1-\dfrac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(X+\sqrt{3})}-\dfrac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}$

1.3 a) $\dfrac{-3}{X-2}+\dfrac{1}{X-3}+\dfrac{2}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}$

1.3 b) $\dfrac{2}{X}+\dfrac{2}{X^2}-\dfrac{11}{4(X-1)}+\dfrac{3}{2(X-1)^2}+\dfrac{3}{4(X+1)}$

1.3 c) $\dfrac{1}{\pi^2X}-\dfrac{1}{\pi^2(X+\pi)}-\dfrac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}$

1.3 d) $\frac{2}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{2}{X-(1+i)}+\frac{1}{(X-(1+i))^2}$

1.4 a) $\dfrac{1}{X+1}-\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{1+3i}{4(X-i)}-\dfrac{1-3i}{4(X+i)}$

1.4 b) $\dfrac{1}{2X}+\dfrac{5}{6(X+2)}+\dfrac{2}{3(X-1)}+\dfrac{1}{(X-1)^2}.$

1.5 a) $\dfrac{1}{2(n+1)}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{4}$

1.5 b) $-\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{3}$

1.6 a) $\dfrac{2}{X+1}+\dfrac{1}{(X+1)^2}+\dfrac{1-2X}{X^2+1}$

1.6 b) $\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{3}{2(X+1)}+\dfrac{X-1}{X^2+X+1}$

1.7 a) $1-2\ln(3)$

1.7 b) $-\dfrac{1}{2}\ln(3)+\dfrac{2}{3}\ln(2)$

1.7 c) $\dfrac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3)$

1.7 d) $\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{9}\ln(5)+\dfrac{2}{9}\ln(2)$

1.7 e) $\dfrac{\pi}{8}$

1.7 f) $\dfrac{1}{2}\ln(2)-\dfrac{1}{4}\ln(3)$

1.8 a) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{1+x}\right|$

1.8 b) $x\mapsto\dfrac{1}{4(1-2x)^2}$

1.8 c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

1.8 d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

1.8 e) 2

1.8 f) $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{16}{3}\ln|x-2|$

1.8 g) $x\mapsto\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

1.8 h) $x\mapsto\dfrac{1}{2}\dfrac{2x-1}{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$

Corrigés

1.1 a) Pour commencer, effectuons la division euclidienne de X^4-2 par $X(X+1)(X+2)=X^3+3X^2+2X$: on trouve $X^4-2=(X^3+3X^2+2X)(X-3)+7X^2+6X-2$. Ainsi, on a

$$\frac{X^4}{X(X+1)(X+2)}=X-3+\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}.$$

On écrit ensuite la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle précédente :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}.$$

Pour calculer a, on multiplie la fraction par X, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en 0 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times X = \frac{7X^2+6X-2}{(X+1)(X+2)}, \text{ ce qui, évalué en 0, donne } a = \frac{-2}{2} = -1.$$

Pour calculer b, on multiplie la fraction par $X+1$, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en -1 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times (X+1) = \frac{7X^2+6X-2}{X(X+2)}, \text{ ce qui, évalué en } -1, \text{ donne } b = \frac{7-6-2}{(-1)(-1+2)} = 1.$$

Enfin, pour c,

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times (X+2) = \frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)}, \text{ ce qui, évalué en } -2, \text{ donne } c = \frac{28-12-2}{(-2)(-2+1)} = \frac{14}{2} = 7.$$

D'où

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{7}{X+2},$$

donc

$$\frac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)} = X - 3 - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{7}{X+2}.$$

1.3 a) Pour cette décomposition en éléments simples, pas de partie entière. On écrit la décomposition théorique :

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X-3}.$$

Par les méthodes du premier exercice, on détermine facilement $c=-3$ et $d=1$. De même, en multipliant par $(X-1)^2$ et en évaluant en 1, on obtient $b=1$. Ensuite, en évaluant en 0, on obtient

$$\frac{1}{6} = \frac{a}{-1} + b + \frac{c}{-2} + \frac{d}{-3},$$

donc $a = 1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 2$. Ainsi,

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{-3}{X-2} + \frac{1}{X-3} + \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

1.4 a) Il suffit de remarquer que $X^4-1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ et de se ramener à la méthode des pôles simples vue précédemment !

1.4 b) Il faut remarquer que $X^4 - 3X^2 + 2X = (X-1)^2(X+2)X$, puis utiliser les méthodes des pôles multiples !

1.5 a) Si l'on considère la fraction rationnelle $\frac{1}{(X-1)X(X+1)}$, alors

$$\frac{1}{(X-1)X(X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{1}{2(X-1)}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)\\ &= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(2-1)}\right) \text{ par télescopage} \qquad = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

1.5 b) On remarque que

$$\frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k+1}\right).$$

Par télescopage, on obtient que cette somme vaut $-\dfrac{2}{n+2} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3}$.

1.6 a) Déjà, il n'y pas de partie entière. Ensuite, la forme de la décomposition en éléments simples est

$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

En multipliant par $(X+1)^2$ et en évaluant en -1, on obtient $b=1$.
En évaluant en 0, on obtient

$$4 = a+b+d,$$

donc $a+d=3$.
En multipliant par X, en évaluant en $x \in \mathbb{R}$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$0 = a+c,$$

donc $c=-a$.
Enfin, en évaluant en 1, on obtient

$$\frac{6}{8} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c+d}{2},$$

donc

$$3 = 2a+b+2c+2d,$$

soit, comme $a+c=0$, et $b=1$, on en déduit que $2d = 3-1 = 2$, donc $d=1$.
Donc $a=2$, donc $c=-2$. Donc

$$\frac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1-2X}{X^2+1}.$$

1.7 a) On effectue la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X+1)}$:

$$\frac{X^2+1}{(X-1)(X+1)} = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1/2}^{1/2} 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \Big[-\ln(x+1) + \ln(1-x)\Big]_{-1/2}^{1/2} \\ &= 1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 2\ln(3).\end{aligned}$$

1.7 e) On remarque que

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\arctan(2x)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{8}.$$

1.7 f) On effectue la décomposition en éléments simples $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}}$ de $\dfrac{X}{X^4-1}$.

On a $X^4-1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$. Donc, on écrit

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Par la méthode déjà décrite, $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$. En multipliant par x et en faisant $x \to +\infty$, $0 = a+b+c$, donc $c = -\dfrac{1}{2}$.

Enfin, en évaluant en 0, $-a+b+d=0$ donc $d=0$. Donc
$$\frac{X}{X^4-1}=\frac{1}{4(X-1)}+\frac{1}{4(X+1)}-\frac{X}{2(X^2+1)}=\frac{X}{2(X^2-1)}-\frac{X}{2(X^2+1)}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_2^3\\&=\frac{1}{4}(\ln(8)-\ln(10)-\ln(3)+\ln(5))\\&=\frac{1}{4}(3\ln(2)-\ln(2)-\ln(5)-\ln(3)+\ln(5))=\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{4}\ln(3)\end{aligned}$$

1.8 a) On écrit que, $\dfrac{1}{X^2-1}=\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{1}{2(X+1)}$, donc une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}$ est
$$x\mapsto\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|.$$

1.8 c) On écrit que, si $x\in\mathbb{R}$,
$$\frac{1}{x^2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2},$$
de primitive $x\mapsto\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

1.8 d) L'idée pour primitiver cet élément simple est d'utiliser une forme canonique afin de se ramener à arctan :
$$\frac{1}{X^2+X+1}=\frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\frac{1}{\frac{4}{3}\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$
Ainsi, une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+x+1}$ est $x\longmapsto\dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1.8 e) L'idée est de faire apparaître $\dfrac{u'}{u}$:
$$\frac{x}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{1}{x^2+2x+3}.$$
Or, une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|$. De plus,
$$\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2},$$
de primitive $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$. Donc une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{x}{x^2+2x+3}$ est
$$x\mapsto\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

1.8 f) La décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)}$ est
$$\frac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)}=X+2+\frac{1}{6(X+1)}-\frac{1}{2(X-1)}+\frac{16}{3(X-2)},$$
donc $x\mapsto\dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{1}{6}\ln|x+1|-\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+\dfrac{16}{3}\ln|x-2|$.
