Feuille d'exercices n° 21 **MP**
Groupes **2024-2025**

($\star$) **Exercice 1** Soient E un ensemble et $x \in E$. Montrer que $S(x) = \{\sigma \in \mathcal{S}_E \mid \sigma(x) = x\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_E, \circ)$.

($\star$) **Exercice 2** Soit $(G, .)$ un groupe. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Montrer que $\{x \in G \mid \forall y \in G,\ xy = yx\}$ est un sous-groupe de G (on l'appelle *centre* de G).
2. Montrer que pour H sous-groupe de G et $a \in G$, $aHa^{-1} = \{aha^{-1},\ h \in H\}$ est un sous-groupe de G.

($\star$) **Exercice 3**

1. Définir $\mathbb{U}$. Montrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Définir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & z^n \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de groupes.
   (b) En considérant le noyau de f, retrouver le résultat de 2).
   (c) f est-il injectif ? Pourquoi f est-il surjectif ? Donner $\operatorname{Im} f$.
4. On pose $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^* \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{pmatrix}$
   (a) Montrer g est un morphisme du groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   (b) Déterminer le noyau de g. g est-il injectif ?
   (c) En considérant l'image de g, retrouver le résultat de 1). g est-il surjectif ?
5. On pose $h : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ z & \mapsto & |z| \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que h est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.
   (b) En considérant le noyau de h, retrouver 1).
   (c) Donner sans démonstration $\operatorname{Im} h$ et $\ker h$ et dire si h est injectif, surjectif.

($\star$) **Exercice 4** Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que G est un groupe pour le produit matriciel.

($\star$) **Exercice 5** Dans chacun des cas suivants, déterminer si H est ou non un sous-groupe de G.

1. $G = (\mathbb{C}^*, .)$ et $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$
2. $G = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et H est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de G.
3. $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et H est l'ensemble des matrices de G à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
4. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et H est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux valant 1.
5. $G = \mathcal{S}_n$ et $H = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(1) = 2\}$.

($\star\star$) **Exercice 6** On pose $G =]-1, 1[$.

1. Montrer que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur G.
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b)}{1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$.
3. Pour $(x,y) \in G^2$, on pose $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. À l'aide des questions précédentes, montrer que $(G,\star)$ est un groupe commutatif.
4. Soit $x \in G$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^{\star n} = \frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}$ où $x^{\star n}$ désigne l'itéré $x \star x \star \cdots \star x$.

($\star$) Exercice 7 Soit G un groupe, et $f : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$. Montrer que f est un automorphisme de G si et seulement si G est commutatif.

(☕) Exercice 8 Théorème de Lagrange.
Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Pour $a \in G$, on note $aH = \{ah,\ h \in H\}$.

1. Montrer que les ensembles aH sont disjoints ou confondus.
2. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G. En déduire le théorème de Lagrange du cours.
3. Application : décrire $H \cap K$ lorsque K et H sont deux sous-groupes de G de cardinaux premiers entre eux.

($\star\star$) Exercice 9 Décrire les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

($\star\star$) Exercice 10 Soit $(G,+)$ un groupe abélien, et H et K deux sous-groupes de G. Montrer que le groupe engendré par $H \cup K$ est

$$H + K = \{h+k,\ h \in H,\ k \in K\}$$

($\star$) Exercice 11 Soit $(G,.)$ un groupe. On définit une relation binaire sur G par : $x\mathcal{R}y$ s'il existe $g \in G$ tel que $x = g^{-1}yg$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer le cardinal de la classe d'équivalence de 1_G.
3. Si G est abélien, montrer que les classes d'équivalence sont des singletons.
4. Montrer que si $x\mathcal{R}y$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 1_G$, alors $y^n = 1_G$.

($\star\star\star$) Exercice 12 Soit G un groupe non réduit à un élément tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$.

1. Montrer que tout élément est égal à son propre inverse. En déduire que G est abélien.
2. Montrer que G possède au moins un sous-groupe de cardinal 2.
3. On suppose que G contient au moins trois éléments. Soit H un sous-groupe fini de G, différent de $\{e\}$ et de G, et soit $g \in G \setminus H$. On pose alors $gH = \{gh,\ h \in H\}$.
   (a) Montrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de cardinal $2|H|$.
   (b) Montrer que si G est fini, alors son cardinal est une puissance de 2 (on pourra raisonner par l'absurde).

($\star\star$) Exercice 13 Donner les tables de multiplication de $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$. Prouver alors que ces deux groupes ne sont pas isomorphes, bien que de même cardinal.

($\star$) Exercice 14 Soit G un groupe et $a \in G$. On considère $f : \begin{pmatrix} (\mathbb{Z},+) & \to & G \\ k & \mapsto & a^k \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que f est un morphisme de groupes.
2. À quel groupe correspond l'image de f ?

3. En distinguant les cas : a est d'ordre infini et a est d'ordre fini, noté n, déterminer le noyau de f.

($\star\star$) **Exercice 15** On considère l'ensemble des permutations $\mathcal{S}_n$ de $[\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 3$, et la transposition $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ et le cycle $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

1. Calculer $c \circ t \circ c^{-1}$ et $c^2 \circ t \circ c^{-2}$.
2. Justifier que $\mathcal{S}_n$ est engendré par c et t.
3. Existe-t-il une partie génératrice de $\mathcal{S}_n$ constituée d'un seul élément ?

($\star$) **Exercice 16** Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. En déduire leur signature.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

($\star$) **Exercice 17** Montrer par récurrence sur n que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est produit d'au plus $n-1$ transpositions.

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ en produit d'au plus 3 transpositions.

($\star$) **Exercice 18** Soient $(G, .)$ un groupe multiplicatif, et a et b dans G.

1. Montrer que a et bab^{-1} ont le même ordre.
2. Montrer que ab et ba ont le même ordre.

($\star\star\star$) **Exercice 19** Soit G un groupe multiplicatif et $a \in G$.

1. On suppose que a est d'ordre 21. Quel est l'ordre de a^3 ? de a^5 ? de a^{12} ?
2. On suppose que a est d'ordre n. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de a^k ?

($\star\star$) **Exercice 20** Soit G un groupe abélien fini de cardinal n et k un entier premier avec n. Montrer que l'application $f : G \to G$, $x \mapsto x^k$ est bijective (on étudiera son noyau).

($\star\star\star$) **Exercice 21** Soit G un groupe cyclique de générateur a et H un sous-groupe de G.

1. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel non nul n tel que $a^n \in H$.
2. Établir que H est le groupe engendré par a^n.
3. En déduire que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est lui-même cyclique.

($\star\star\star$) **Exercice 22** Soit G un groupe.

1. Montrer que si G est fini alors l'ensemble des sous-groupes de G est fini.
2. Réciproquement, on suppose que l'ensemble des sous-groupes de G est fini.
   Montrer que tout élement de G est d'ordre fini, puis montrer que G est fini.

($\star\star\star$) **Exercice 23** Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$, puis déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}, +)$.

($\star\star\star$) **Exercice 24** On rappelle que tout réel est limite d'une suite de rationnels.
Montrer que les endomorphismes de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ continus sont les homothéties (applications $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$).
