
($\star$) Exercice 1 On considère $f(x,y) = (x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2$.

1. Mettre $f(x,y)$ sous la forme $\|xu + yv - a\|^2$, avec u, v, a vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera. Ainsi :
$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{h\in\mathrm{Vect}(u,v)} \|h-a\|^2$$
2. En déduire que f admet un minimum en un unique couple de $\mathbb{R}^2$, ce couple étant $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

($\star$) Exercice 2 On considère $f(x,y) = (x-1)^2 + (3y+3)^2 + (y-2x-2)^2$.

1. Vérifier que $f(x,y) = \|xu + yv - a\|^2$, avec
$$u = (1,0,-2) \quad v = (0,3,1) \quad a = (1,-3,2)$$
Ainsi :
$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{h\in\mathrm{Vect}(u,v)} \|h-a\|^2$$
2. En déduire que f admet un minimum en un unique couple de $\mathbb{R}^2$, ce couple étant $\left(-\dfrac{22}{23}, -\dfrac{41}{46}\right)$.

($\star\star$) Exercice 3 Soit $n \geqslant 2$. On note $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ et on rappelle que $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$. On considère la fonction f donnée par :
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2$$

1. Montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur $\overline{B}$.
2. Montrer que ni m ni M ne sont atteints en un point de B.
3. Montrer que $m = -1$.
4. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $M = n-1$.

($\star$) Exercice 4 f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Étudier les extrema de f.

($\star$) Exercice 5 f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$. Déterminer les extrema de f.

($\star$) Exercice 6 Le but de l'exercice est l'étude d'un extremum local de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par :
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3 - 4)$$

1. Montrer que f admet un unique point critique dont les coordonnées sont toutes non nulles, qui est $a = (1,1,1)$.
2. Montrer que f admet un extremum local en a et en préciser la nature.

($\star$) Exercice 7 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extrema locaux de f.

($\star$) Exercice 8 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(x,y) = (x^n - y)e^{x-y}$.

1. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles du premier ordre.

2. Dans le cas $n = 2$, déterminer l'unique point critique de f_2. Montrer que ce point critique correspond à un extremum local et préciser sa nature.
3. Dans le cas $n = 1$, montrer que f_1 admet une infinité de points critiques. Montrer qu'en ces points f_1 admet un minimum global.

($\star$) Exercice 9 $\quad f(x, y, z) = 2x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz$

1. Montrer que f n'est ni minorée ni majorée. f n'admet donc aucun extremum global.
2. Montrer que f admet deux points critiques, et deux seulement, que l'on déterminera.
3. (a) Vérifier que la matrice hessienne de f en l'un des deux points critiques est $\begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
   (b) Sans calcul mais avec Python, dire si ce point critique correspond à un extremum local pour f.
4. (a) Vérifier que la matrice hessienne de f en l'autre point critique est $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) En menant un raisonnement utilisant la trace de cette matrice, étudier la nature de ce point critique.

($\star\star$) Exercice 10 $\quad$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$$

1. Vérifier que $\quad 2 \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = (x_1 + \cdots + x_n)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
2. Montrer alors que f admet un minimum global en O$= (0, \ldots, 0)$.
3. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^n$ et la matrice hessienne de f en ces points.

($\star\star$) Exercice 11 $\quad f(x, y) = -x + y \quad$ et $\quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ et $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2 = 0\}$

1. Montrer que f admet un maximum et un minimum sous la contrainte $g(x, y) = 0$ (on ne cherche pas ici à les déterminer).
2. Montrer que f admet deux points critiques sous la contrainte $g(x, y) = 0$. En déduire le maximum et le minimum de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide de tracés graphiques : représentation de $\mathcal{C}$ et tracés de courbes de niveau de f.

($\star\star$) Exercice 12 $\quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + 10 \quad$ et $\quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$. On admet que :

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f admet un maximum et un minimum sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.
2. Montrer que f admet six points critiques sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$. En déduire le maximum et le minimum de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

($\star\star$) Exercice 13 $\quad$ On veut trouver le minimum de $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (]0, +\infty[)^n$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$.

1. Effectuer le changement de variable $y_i = \ln x_i$. Que devient le problème ?
   On pose $f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{y_i}$ et on étudie f sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$.
2. Déterminer l'unique point critique de f sous la contrainte.
3. Vérifier que $f(y_1, \dots, y_n) = n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e^{y_i} - 1 - y_i)$.
4. Conclure que l'unique point critique de f correspond à un minimum global sur $\mathbb{R}^n$. Répondre au problème initial.

($\star\star$) Exercice 14 Soit $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^4$.

En procédant par substitution, déterminer les extrema locaux de f sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$.

($\star\star$) Exercice 15 On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considère $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$ trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y - c_i)^2$$

On pose $A = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & \langle a, b\rangle \\ \langle a, b\rangle & \|b\|^2 \end{pmatrix}$ et $\delta = \|a\|^2 \times \|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2$. Enfin, on suppose que la famille (a, b) est libre.

1. Montrer que $\delta > 0$. Donner le signe des valeurs propres de A.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer le gradient de f et la matrice hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$, en fonction de $\|a\|$, $\|b\|$ et de produits scalaires.
4. Montrer que f possède un unique point critique, noté $(\widehat{x}, \widehat{y})$.
5. Montrer que ce point critique correspond à un extremum local pour f. Est-ce un minimum ou un maximum ?

($\star\star$) Exercice 16 Soit $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer les points critiques de f sous la contrainte $g(x_1, \dots, x_n) = 1$.
3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, vérifier que f admet un minimum global pour l'optimisation sous la contrainte $g(x_1, \dots, x_n) = 1$.
4. Application : On considère trois variables aléatoires X, Y, Z mutuellement indépendantes, ayant même loi, même espérance m et même variance $\sigma^2 > 0$.
   Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on note $U = xX + yY + zZ$. Déterminer les réels x, y et z pour que U ait pour espérance m et ait une variance minimale.

($\star$) Exercice 17 On considère, sur $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = y^2(y^2 - x^4)$.

1. Visualiser sur un schéma les trois domaines de $\mathbb{R}^2$ où la fonction f est nulle, où elle prend des valeurs strictement positives, et où elle prend des valeurs strictement négatives.
2. Justifier alors rigoureusement ce que la question précédente permet de conjecturer, à savoir :
   — pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(tu)$ admet un minimum local en 0,
   — pourtant, la fonction f ne présente pas de minimum local en 0.

($\star\star\star$) Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ une fonction convexe, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, la fonction $g : t \mapsto f(a+tu)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant g, montrer f admet un minimum en a si, et seulement si, a est un point critique de f.

($\star\star$) Exercice 19 Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $\Phi(x) = \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}$. On s'interdit d'utiliser le théorème spectral dans cet exercice.

1. Calculer le gradient de Φ en tout point de $E \setminus \{0\}$.
2. Montrer que $E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de f si, et seulement si, $\nabla\Phi(x) = 0$.
3. Montrer que Φ admet un maximum sur $E \setminus \{0\}$.
4. En déduire que f admet un vecteur propre.

($\star\star$) Exercice 20 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle .,. \rangle$. Soit f un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ ayant toutes ses valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que $\langle f(x), x\rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul.
2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$$

   Calculer le gradient de g en $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Montrer que g admet un unique point critique.
4. Montrer que g admet un minimum global.

Banque épreuve orale CCINP

Analyse : 41, 56.
