**Feuille d'exercices n° 20** **MP**
**Calcul différentiel** **2023-2024**
**Optimisation**

---

(✍) **Exercice 1** Donner le domaine de définition de $f$, $g$ et $h$ ; représenter ces domaines et préciser, sans démonstration, si ce sont des ensembles ouverts, fermés, bornés :

$$f(x,y) = \frac{1}{y^2 - x^2} \quad g(x,y) = \ln(1-xy) \quad h(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

---

(✍) **Exercice 2** Donner et représenter les domaines de définition de $f$ et $g$ données par :

$$f(x,y) = \ln(1-x^2-y) + \sqrt{1+y-x^2} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \ln(\sqrt{x}-y-3)$$

---

(✍) **Exercice 3** Représenter les ensembles suivants et indiquer pour chacun, sans démonstration, s'il s'agit d'un ensemble ouvert, fermé, borné.

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y<1\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant 2x-4y \leqslant 5\}$$

$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 2\}$$

$$D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < |x-4| < 6\}$$

$$D_5 = [0,1] \times [0,2]$$

---

(✍) **Exercice 4** $f(x,y) = 2x^2+y^2-3xy+x-4y-1$ et $a=(1,0)$ et $u=(-1,1)$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice hessienne de $f$ en $a$.
2. Donner l'équation du plan tangent au graphe de $f$ en $a$.
3. Calculer la dérivée première directionnelle de $f$ en $a$ suivant la direction $u$.

---

($\star$) **Exercice 5** Soit $U = ]1,+\infty[\times]0,\frac{1}{2}[$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto xy(1-2y)^{x-1}$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.
2. Montrer que pour tout $t \in ]0,1[ \quad \ln(1-t) < -t$.
3. En déduire que $f$ n'admet pas d'extremum sur $U$.

---

(✍) **Exercice 6** Donner la matrice hessienne en $(x,y)$ de $f : (x,y) \mapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$. Même question pour $g : (x,y) \mapsto e^{xy}$.

---

($\star\star$) **Exercice 7** Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice hessienne de :

$$f : \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xBx^\top \end{array} \right)$$

---

($\star$) **Exercice 8** $f(x,y) = \cos(x+y) + ye^x$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.
2. Donner le gradient et la matrice hessienne de $f$ en $(x,y)$.
3. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de $f$ au point $(0,0)$ de $\mathbf{R}^2$.

---

($\star\star$) **Exercice 9**

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$$

1. Vérifier que $f(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.
2. Donner le gradient et la Hessienne de $f$ en $x$.

---

**($\star$) Exercice 10** On considère $f(x,y) = (x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2$.

1. Mettre $f(x,y)$ sous la forme $\|xu + yv - a\|^2$, avec $u, v, a$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera. Ainsi :

$$\min_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} f(x,y) = \min_{h\in\mathrm{Vect}<u,v>} \|h-a\|^2$$

2. En déduire que $f$ admet un minimum en un unique couple de $\mathbf{R}^2$, ce couple étant $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

---

**($\star$) Exercice 11** On considère $f(x,y) = (x-1)^2 + (3y+3)^2 + (y-2x-2)^2$.

1. Vérifier que $f(x,y) = \|xu + yv - a\|^2$, avec

$$u = (1, 0, -2) \quad v = (0, 3, 1) \quad a = (1, -3, 2)$$

Ainsi :

$$\min_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} f(x,y) = \min_{h\in\mathrm{Vect}<u,v>} \|h-a\|^2$$

2. En déduire que $f$ admet un minimum en un unique couple de $\mathbf{R}^2$, ce couple étant $\left(-\dfrac{22}{23}, -\dfrac{41}{46}\right)$.

---

**($\star\star$) Exercice 12** Soit $n \geqslant 2$. On note $B = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ et on rappelle que $\overline{B} = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$. On considère la fonction $f$ donnée par :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

1. Montrer que $f$ admet un minimum $m$ et un maximum $M$ sur $\overline{B}$.
2. Montrer que ni $m$ ni $M$ ne sont atteints en un point de $B$.
3. Montrer que $m = -1$.
4. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $M = n - 1$.

---

**($\star$) Exercice 13** $f$ est définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Étudier les extrema de $f$.

---

**(✍) Exercice 14** $f$ est définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$. Déterminer les extrema de $f$.

---

**($\star$) Exercice 15** Le but de l'exercice est l'étude d'un extremum local de la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ donnée par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3 - 4)$$

1. Montrer que $f$ admet un unique point critique dont les coordonnées sont toutes non nulles, qui est $a = (1, 1, 1)$.
2. Montrer que $f$ admet un extremum local en $a$ et en préciser la nature.

---

**($\star$) Exercice 16** $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extrema locaux de $f$.

---

**($\star$) Exercice 17** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(x,y) = (x^n - y)e^{x-y}$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles du premier ordre.
2. Dans le cas $n = 2$, déterminer l'unique point critique de $f_2$. Montrer que ce point critique correspond à un extremum local et préciser sa nature.
3. Dans le cas $n = 1$, montrer que $f_1$ admet une infinité de points critiques. Montrer qu'en ces points $f_1$ admet un minimum global.

---

($\star$) **Exercice 18** $\quad f(x, y, z) = 2x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz$

1. Montrer que $f$ n'est ni minorée ni majorée. $f$ n'admet donc aucun extremum global.
2. Montrer que $f$ admet deux points critiques, et deux seulement, que l'on déterminera.
3. (a) Vérifier que la matrice hessienne de $f$ en l'un des deux points critiques est $\begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
   (b) Sans calcul mais avec Python, dire si ce point critique correspond à un extremum local pour $f$.
4. (a) Vérifier que la matrice hessienne de $f$ en l'autre point critique est $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) En menant un raisonnement utilisant la trace de cette matrice, étudier la nature de ce point critique.

---

($\star\star$) **Exercice 19** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}^n$ par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$$

1. Vérifier que $\quad 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = (x_1 + \cdots + x_n)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
2. Montrer alors que $f$ admet un minimum global en O$= (0, \dots, 0)$.
3. Déterminer les points critiques de $f$ sur $\mathbf{R}^n$ et la matrice hessienne de $f$ en ces points.

---

($\star\star$) **Exercice 20** $\quad f(x, y) = -x + y \quad$ et $\quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ et $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2 = 0\}$

1. Montrer que $f$ admet un maximum et un minimum sous la contrainte $g(x, y) = 0$ (on ne cherche pas ici à les déterminer).
2. Montrer que $f$ admet deux points critiques sous la contrainte $g(x, y) = 0$. En déduire le maximum et le minimum de $f$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide de tracés graphiques : représentation de $\mathcal{C}$ et tracés de courbes de niveau de $f$.

---

($\star\star$) **Exercice 21** $\quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + 10 \quad$ et $\quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$. On admet que :

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0\}$$

est un fermé de $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que $f$ admet un maximum et un minimum sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.
2. Montrer que $f$ admet six points critiques sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$. En déduire le maximum et le minimum de $f$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

($\star\star$) **Exercice 22** On veut trouver le minimum de $S(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (]0, +\infty[)^n$ et $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$.

1. Effectuer le changement de variable $y_i = \ln x_i$. Que devient le problème ?
   On pose $f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{y_i}$ et on étudie $f$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$.
2. Déterminer l'unique point critique de $f$ sous la contrainte.
3. Vérifier que $f(y_1, \dots, y_n) = n + \sum_{i=1}^{n} (e^{y_i} - 1 - y_i)$.
4. Conclure que l'unique point critique de $f$ correspond à un minimum global sur $\mathbb{R}^n$. Répondre au problème initial.

---

($\star\star$) **Exercice 23** Soit $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^4$.

En procédant par substitution, déterminer les extrema locaux de $f$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$.

---

($\star\star$) **Exercice 24** On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considère $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$ trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ et la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y - c_i)^2$$

On pose $A = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & \langle a, b \rangle \\ \langle a, b \rangle & \|b\|^2 \end{pmatrix}$ et $\delta = \|a\|^2 \times \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2$. Enfin, on suppose que la famille $(a, b)$ est libre.

1. Montrer que $\delta > 0$. Donner le signe des valeurs propres de $A$.
2. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer le gradient de $f$ et la matrice hessienne de $f$ en tout point de $\mathbb{R}^2$, en fonction de $\|a\|$, $\|b\|$ et de produits scalaires.
4. Montrer que $f$ possède un unique point critique, noté $(\widehat{x}, \widehat{y})$.
5. Montrer que ce point critique correspond à un extremum local pour $f$. Est-ce un minimum ou un maximum ?

---

($\star\star$) **Exercice 25** Soit $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer les points critiques de $f$ sous la contrainte $g(x_1, \dots, x_n) = 1$.
3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, vérifier que $f$ admet un minimum global pour l'optimisation sous la contrainte $g(x_1, \dots, x_n) = 1$.
4. Application : On considère trois variables aléatoires $X, Y, Z$ mutuellement indépendantes, ayant même loi, même espérance $m$ et même variance $\sigma^2 > 0$.
   Pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on note $U = xX + yY + zZ$. Déterminer les réels $x$, $y$ et $z$ pour que $U$ ait pour espérance $m$ et ait une variance minimale.

---

($\star\star$) **Exercice 26** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x, y) \neq 0$, on pose $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$.

1. Par quelle valeur peut-on prolonger $f$ par continuité en $0$ ? On note encore $f$ la fonction définie par ce prolongement.

2. Calculer les dérivées partielles de $f$ en $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Calculer les dérivées partielles de $f$ en $(0,0)$.
4. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. La fonction $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ ?

---

($\star$) **Exercice 27** Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de $f$.

1. $g(x,y) = f(y,x)$
2. $g(x) = f(x,x)$
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x))$
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$

---

($\star\star$) **Exercice 28** On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que la fonction suivante est différentiable en tout point et donner sa différentielle.

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

---

($\star$) **Exercice 29** On considère, sur $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = y^2(y^2 - x^4)$.

1. Visualiser sur un schéma les trois domaines de $\mathbb{R}^2$ où la fonction $f$ est nulle, où elle prend des valeurs strictement positives, et où elle prend des valeurs strictement négatives.
2. Justifier alors rigoureusement ce que la fonction précédente permet de conjecturer, à savoir :
   — pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(tu)$ admet un minimum local en 0,
   — pourtant, la fonction $f$ ne présente pas de minimum local en 0.

---

($\star\star\star$) **Exercice 30** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ une fonction convexe, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, la fonction $g : t \mapsto f(a + tu)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant $g$, montrer $f$ admet un minimum en $a$ si, et seulement si, $a$ est un point critique de $f$.

---

($\star$) **Exercice 31** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, de variables $x$ et $y$. On définit :

$$g(u,v) = f(uv, u^2 + v^2)$$

1. Exprimer les dérivées partielles de $g$ en fonction des dérivées partielles de $f$.
2. Exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g$ en fonction des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de $f$.

---

($\star\star$) **Exercice 32** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = M^3$. Justifier que $f$ est différentiable et calculer sa différentielle en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

(☕) **Exercice 33** On étudie $f : M \mapsto M^{-1}$ définie sur l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. En exploitant l'identité $(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2$, établir que l'application $f$ est différentiable en $I_n$.
2. En déduire que $f$ est différentiable en toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et exprimer sa différentielle.
3. Retrouver ce résultat en différentiant à partir de l'égalité $M \times M^{-1} = I_n$.

($\star$) **Exercice 34** Pour $f$ endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien et $u \in E$, montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle + \langle u, x\rangle$ est différentiable en tout point $a$ et donner sa différentielle en $a$, ainsi que son gradient en $a$.

---

($\star$) **Exercice 35** Soit $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^3 + 3xy + z = 0\}$ et $u = (0, -1, 1)$. Déterminer l'ensemble des points de $X$ en lesquels le vecteur $u$ est tangent à $X$.

---

($\star\star\star$) **Exercice 36**

1. Montrer que si $A$ est une matrice antisymétrique d'ordre $n$ à coefficients réels, alors pour tout réel $t$, $e^{tA} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ au point $I_n$.

---

($\star\star$) **Exercice 37** Soit $f$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $E$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $\Phi(x) = \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}$. On s'interdit d'utiliser le théorème spectral dans cet exercice. On donne, pour $u$ et $w$ à valeurs réelles :

$$\mathrm{d}(\frac{u}{w})(a)(h) = \frac{\mathrm{d}u(a)(h)w(a) - u(a)\mathrm{d}w(a)(h)}{w(a)^2}$$

1. Calculer le gradient de $\Phi$ en tout point de $E \setminus \{0\}$.
2. Montrer que $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de $f$ si et seulement si $\nabla\Phi(x) = 0$.
3. Montrer que $\Phi$ admet un maximum sur $E \setminus \{0\}$.
4. En déduire que $f$ admet un vecteur propre.

---

($\star$) **Exercice 38** Montrer que $f : (x, y) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

---

($\star\star$) **Exercice 39** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Pour cela, on préconise d'effectuer le changement de variables $\begin{cases} u &= x + y \\ v &= 2x + 3y \end{cases}$.

---

($\star\star\star$) **Exercice 40** Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

Pour cela, on effectuera le changement de variables $\begin{cases} u &= x + y \\ v &= x - y \end{cases}$.

---

($\star\star$) **Exercice 41** On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle ., .\rangle$. Soit $f$ un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ ayant toutes ses valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que $\langle f(x), x\rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul.
2. Soit $u$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$$

   Calculer le gradient de $g$ en $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Montrer que $g$ admet un unique point critique.
4. Montrer que $g$ admet un minimum global.

---

**($\star\star\star$) Exercice 42** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (cette quantité s'appelle le laplacien de $f$). Donner une expression du laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire donner $\Delta f$ en fonction de dérivées partielles de $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On commencera par calculer $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

---

**($\star\star\star$) Exercice 43** Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $A(s)$ et $A(t)$ commutent.

1. Justifier que $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(M)$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.
2. Soit $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(A(t))$. En remarquant que $\Phi(t) = \exp(A(t) - A(t_0))\exp(A(t_0))$, montrer que
$$\Phi'(t_0) = A'(t_0)\exp(A(t_0))$$

---

**($\star\star$) Exercice 44** Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (*)$$

1. Déterminer les solutions constantes de $(*)$.
2. Soit $f$ une solution non identiquement nulle de $(*)$. Montrer que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, et que $f$ est une fonction paire.
3. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad F(x, y) = f(x+y) + f(x-y)$$
Justifier que $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles secondes de $F$.
On suppose que $f$ est une solution non identiquement nulle de $(*)$. Des expressions de $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, déduire que $f$ vérifie une équation différentielle de la forme $z'' - \alpha z = 0$.
Donner les solutions de l'équation différentielle $z'' - \alpha z = 0$ suivant les valeurs de $\alpha$.
4. Déterminer toutes les solutions de $(*)$.

---

**Banque épreuve orale**

Analyse : 33, 52, 57, 58.

---