Feuille d'exercices n^o 19 **MP**
Équations différentielles **2023-2024**

($\star$) **Exercice 1** Raccord de solutions.
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $xy' - 2y = 2x^4$.

($\star$) **Exercice 2** Raccord de solutions.
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x$.

($\star$) **Exercice 3** Raccord de solutions.
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2y' - y = (x^2-1)e^x$.

($\star$) **Exercice 4** Soit $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, où $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I, et soit f une solution de l'équation. Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

($\star$) **Exercice 5** Résoudre :

1. $y'' + 2y' = x^2 - x + 2\operatorname{ch}(x)$
2. $y'' - 3y' + 2y = e^x$

($\star$) **Exercice 6** Soient a et b réels, et $c :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue.

$$(E) : \qquad x^2y'' + axy' + by = c(x)$$

1. On effectue un changement de variable : on pose $z : t \mapsto y(e^t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et y deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
   (a) Calculer z' et z''. Exprimer $y(e^t)$, $y'(e^t)$, $y''(e^t)$ en fonction de z, z' et z''.
   (b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle à coefficients constants que l'on précisera.
2. Résoudre avec cette méthode l'équation $x^2y'' + xy' + y = x^2 + x + 1$.

($\star\star$) **Exercice 7**
Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) + f(t) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

($\star$) **Exercice 8** Résoudre sur $I =]0,+\infty[$ l'équation

$$(E) : \quad t^2y'' + ty' - y = 0$$

en commençant par chercher des fonctions solutions de la forme $y(t) = t^\alpha$ avec α réel.

($\star\star$) **Exercice 9** Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= 4x - 2y + e^t \\ y' &= 3x - y + 2e^t \end{cases}$.

($\star$) **Exercice 10** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$; on vérifiera que $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sont solutions.

($\star\star$) **Exercice 11** Montrer qu'il existe une solution h de l'équation $xy'' + y' + y = 0$ développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.

($\star\star\star$) **Exercice 12** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Exprimer à l'aide d'une intégrale la solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + y = f(x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

($\star\star$) **Exercice 13** On considère le système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de $A(t)$.
2. Montrer qu'il existe P matrice inversible indépendante de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
3. Résoudre le système différentiel.

($\star\star$) **Exercice 14** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que les solutions du système différentiel $X'(t) = MX(t)$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on pourra considérer $f : t \mapsto \|X(t)\|^2$ pour X solution du système différentiel.

($\star\star$) **Exercice 15** On considère l'équation différentielle $(E) : \quad y'' - xy = 0$.
Montrer, sans chercher à les expliciter à l'aide de fonctions usuelles, que toutes les solutions de (E) sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

($\star\star$) **Exercice 16** Montrer, en utilisant le wronskien, que les fonctions $f_1 : t \mapsto \cos t$ et $f_2 : t \mapsto t$ ne sont pas solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même équation différentielle de la forme $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ avec a et b continues sur $\mathbb{R}$.

($\star$) **Exercice 17** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \quad (t^2 + 2t + 2)y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$ en recherchant des fonctions polynomiales solutions.

($\star\star$) **Exercice 18** Résoudre sur des intervalles à préciser l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

($\star\star$) **Exercice 19** Sur $\mathbb{R}$, on considère $(E) : \quad 4tx'' + 2x' - x = 0$.

1. Déterminer une solution φ_1 de (E) développable en série entière vérifiant $\varphi_1(0) = 1$.
2. On se place dans cette question sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (a) Exprimer φ_1 à l'aide de la fonction ch.
   (b) Soit φ une solution de (E) sur $]0, +\infty[$, et W le wronskien de (φ_1, φ). Donner l'équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par W et en déduire $W(t)$. En déduire l'expression de $(\dfrac{\varphi}{\varphi_1})'$, puis φ.
   (c) En déduire la résolution de (E) sur $]0, +\infty[$.
3. On se place dans cette question sur l'intervalle $]-\infty, 0[$. En adaptant le raisonnement précédent, résoudre (E) sur cet intervalle.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

($\star\star\star$) **Exercice 20** Soient q une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + qy = 0$$

1. Soit f une solution bornée de (E) sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f' admet une limite en $+\infty$ puis déterminer la valeur de cette limite.

2. Soient f et g deux solutions bornées de (E) sur $\mathbb{R}^+$. Étudier le wronskien $W = fg' - f'g$ des solutions f et g. En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

($\star$) Exercice 21 Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' &= -y+1 \\ y' &= \quad x-t \end{cases}$.

(☕) Exercice 22

1. Soient p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $p \leqslant q$ sur $\mathbb{R}$. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $u'' + pu = 0$ et $v'' + qv = 0$. On suppose que u s'annule en des réels a et b avec $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$.
   (a) On pose $W = u'v - v'u$. Déterminer W'.
   (b) En déduire que v s'annule sur $[a, b]$.
2. Application. Soient r une fonction continue sur $\mathbb{R}$, f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' + rf = 0$ et $M > 0$.
   (a) On suppose $r \geqslant M^2$. Montrer que tout intervalle fermé de longueur $\frac{\pi}{M}$ contient au moins un zéro de f.
   (b) On suppose $r \leqslant M^2$. On suppose que f s'annule en des réels a et b tels que $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que $b - a \geqslant \frac{\pi}{M}$.

($\star\star$) Exercice 23 Résolution de l'équation différentielle (E) : $xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que h définie par $h(x) = x^\alpha$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. On note $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Dresser le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que $G(x) \to -\infty$ quand $x \to 0^+$ et que $G(x)$ possède une limite finie quand $x \to +\infty$.
4. Soit $s(x) = xf(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que s est solution de (E) si et seulement si f' est solution d'une équation différentielle du premier ordre.
5. Résoudre cette équation différentielle.
6. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E).

($\star\star\star$) Exercice 24

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\alpha > 0$ tels que $f' + \alpha f$ tende vers 0 en $+\infty$. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' + 3f' + 2f$ tende vers 0 en $+\infty$. En considérant $f' + 2f$, montrer que f, f' et f'' tendent vers 0 en $+\infty$.

($\star\star$) Exercice 25 On considère l'équation : $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution sur $\mathbb{R}$ polynomiale de degré 2.
2. En posant $x = e^t$, résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$.
3. Résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$ en posant cette fois $x = -e^t$.

($\star\star$) Exercice 26 Soit le système suivant : $\begin{cases} x' = z + \cos t \\ y' = y + \mathrm{e}^{3t} \\ z' = x + \sin t \end{cases}$

1. Résoudre le système différentiel.

2. Trouver la solution particulière telle que x et z soient bornées sur $\mathbb{R}_+$ et que $x(0) = z(0)$.

($\star\star$) Exercice 27 Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $f'(x) = f(-x)$ pour tout réel x.

Banque épreuve orale

Analyse : 31, 32, 42. Algèbre : 74, 75.
