
(★) **Exercice 1**

Montrer que si A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A^k = I_n$ pour un certain entier $k \geq 2$, alors $A^2 = I_n$. Que dire de la matrice A si k est impair ?

(★★) **Exercice 2** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que si A est symétrique alors

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A .

(★) **Exercice 3** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner les valeurs propres et espaces propres de A .
3. Soit \mathcal{B} une base de vecteurs propres de A . Donner une base orthonormée constituée de vecteurs propres de A (on pourra s'aider du procédé d'orthonormalisation de Schmidt). Écrire alors la diagonalisation de A avec une matrice de passage orthogonale.

(★★) **Exercice 4**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique S de valeurs propres positives telle que $A = S^2$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible. En utilisant la matrice $A^\top A$ et la question 1., montrer qu'il existe une matrice orthogonale R et une matrice symétrique S de valeurs propres strictement positives telles que $A = RS$.

(★) **Exercice 5** Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n , vérifiant $A^3 = -4A$. Montrer que A est la matrice nulle.

(★) **Exercice 6** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et soit $B = A^\top A$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de son produit scalaire canonique. *Hormis 4. et 5., les questions sont indépendantes.*

1. Montrer que B est symétrique.
2. Montrer que $\text{Sp}(B) \subset \mathbf{R}^+$.
3. Montrer que $B = 0$ si et seulement si $A = 0$.
4. Montrer que $\ker A = \ker B$.
5. En déduire que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

(★) **Exercice 7**

1. $E = \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et a est un vecteur unitaire de E . f est l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x + 2\langle x, a \rangle a$$

Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .

2. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\top B)$. f est l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in E, \quad f(M) = M^\top$$

Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .

3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. f est l'endomorphisme de E défini par :

$$f(P) = 2XP' + (X^2 - 1)P''$$

Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .

(***) **Exercice 8** Soient a et b vecteurs non nuls d'un espace euclidien E . On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x + \langle x, a \rangle b$$

Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si la famille (a, b) est liée.

(*) **Exercice 9** Soient E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On considère une base orthonormée de E , et on note S la matrice de f dans cette base et T la matrice de g dans cette base. On suppose enfin que S est symétrique et que T est antisymétrique.

1. Montrer que $\forall x \in E$, $f(x)$ et $g(x)$ sont orthogonaux.
2. Montrer que $\forall x \in E$, $\|(f - g)(x)\| = \|(f + g)(x)\|$.

(***) **Exercice 10** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n .

1. (a) Montrer que pour tous P et Q éléments de E_n , l'intégrale $\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$ est convergente.

(b) Montrer que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$ est un produit scalaire sur E_n .

2. Soit ψ définie sur E_n par $\psi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$ où P' et P'' désignent les deux premiers polynômes dérivés du polynôme P .

- (a) Montrer que ψ est un endomorphisme de E_n .
- (b) ψ est-il bijectif ?
- (c) Montrer que ψ est diagonalisable.

3. (a) Montrer que pour tous P et Q de E_n : $\langle \psi(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t) dt$.

(b) Retrouver ainsi le fait que ψ est diagonalisable.

(***) **Exercice 11** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$. Soit f un endomorphisme autoadjoint de \mathbb{R}^n .

On pose $\rho = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(f)\}$. Montrer que $\rho = \|f\|_{\text{op}}$.

(***) **Exercice 12** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Soit f_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f_n(P)(X) = \frac{(X^2 - 1)}{2}P''(X) + XP'(X) - P(X)$$

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose dans cette question que $n = 3$.
 - (a) Déterminer la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - (b) Déterminer une base de $\ker f_3$ et une base de $\text{Im } f_3$. Ces espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?
 - (c) La matrice M_3 est-elle diagonalisable ?
3. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.
 - (a) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 - (b) Montrer que : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \langle f_n(P), Q \rangle = \langle P, f_n(Q) \rangle$. Qu'en déduit-on ?
4. On continue avec le produit scalaire de la question précédente. Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $p_k(P)$ la projection orthogonale de P sur $\mathbb{R}_k[X]$.
 Soit (T_0, T_1, \dots, T_n) la famille définie par : $T_0 = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, T_k = X^k - p_{k-1}(X^k)$.
 - (a) Montrer que (T_0, T_1, \dots, T_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - (b) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, T_k$ est vecteur propre de f_n et préciser la valeur propre associée.

(★) **Exercice 13** Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de $E, \langle f(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer que pour tous x et y de $E, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.
2. Montrer que $\ker f = (\text{Im } f)^\perp$.
3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f , alors $\lambda = 0$. f est-il diagonalisable ?
4. Montrer que la matrice de f dans toute base orthonormée de E est antisymétrique.
5. Soit u un automorphisme autoadjoint de E tel que $f \circ u = u \circ f$.
 - (a) Montrer que $\forall x \in E, \langle f(x), u(x) \rangle = 0$.
 - (b) En déduire que $f + u$ est un automorphisme de E .

(★★) **Exercice 14** Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire \langle, \rangle .

On dit qu'un endomorphisme φ est antisymétrique si : $\forall (x, y) \in E^2, \langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle$.

Dans tout l'exercice, on considère un endomorphisme φ de E antisymétrique.

1. Établir les propriétés suivantes :
 - (a) Pour tout x de E , on a $\langle x, \varphi(x) \rangle = 0$.
 - (b) $\text{Im } \varphi = (\ker \varphi)^\perp$.
 - (c) Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que si F est stable par φ , alors F^\perp est stable par φ .
 - (d) $\ker \varphi = \ker(\varphi^2)$.
 - (e) Le spectre de φ est soit vide soit réduit à $\{0\}$.
2. Montrer que toutes les valeurs propres de φ^2 sont négatives ou nulles.
3. Soit :
 - F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geq 2, p$ pair ;
 - α un réel strictement positif ;
 - u un endomorphisme antisymétrique de F tel que $u^2 = -\alpha^2 \text{Id}_F$, où Id_F est l'endomorphisme identité de F .
 - (a) On suppose que $p = 2$. Établir l'existence d'une base orthonormale de F dans laquelle la matrice A_α de u est donnée par $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

(b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p , montrer qu'il existe une base de F dans laquelle

$$\text{la matrice } B_\alpha \text{ de } u \text{ est donnée par } B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & (0) & & \\ (0) & A_\alpha & & \vdots \\ & (0) & \ddots & (0) \\ & & (0) & A_\alpha \end{pmatrix}.$$

(★) **Exercice 15** $E = \mathbb{R}^3$. On considère f endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est A (resp. B, C).

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Expliquer pourquoi il existe une base orthonormée de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est de l'une des formes suivantes :

$$\pm I_3, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \neq 0[\pi]$$

2. Préciser si f correspond à : une rotation autour d'un axe (préciser lequel), une réflexion (préciser le plan invariant), ou la composée d'une rotation et d'une réflexion.

(★) **Exercice 16** Déterminer les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables sur \mathbb{R} .

(★) **Exercice 17** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ et α et β les plus petite et plus grande valeurs propres de S .

1. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que $X^T S X = X^T A X$.
2. En déduire que $\alpha X^T X \leq X^T A X \leq \beta X^T X$.
3. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset [\alpha, \beta]$.

(★★) **Exercice 18** Soient v_1, \dots, v_n des vecteurs d'un espace euclidien E . On note G la matrice de coefficients $g_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$.

1. Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer que G est inversible si, et seulement si, la famille (v_1, \dots, v_n) est libre.

(★★★) **Exercice 19** $E = \mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme A de E tel que

$$\text{pour tout } P \text{ de } E, \quad P(0) = \int_0^1 A(t)P(t) dt$$

2. Montrer que A est de degré égal à n .

(★) **Exercice 20** Montrer que toutes les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables sur \mathbb{C} .

(★) **Exercice 21** Déterminer les isométries d'un espace euclidien qui sont aussi des endomorphismes autoadjoints.

(**) **Exercice 22** Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(AM)$$

(*) **Exercice 23** Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(u^* \circ u) = \ker u$ et $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im } u^*$.

(***) **Exercice 24** Soient f et g des endomorphismes d'un espace euclidien E tels que $f^* \circ f = g^* \circ g$.

1. Montrer que $\ker f = \ker g$.
2. Montrer qu'il existe $u \in \text{O}(E)$ tel que $g = u \circ f$. Indication : considérer $(f(w_1), \dots, f(w_r))$ une base orthonormée de $\text{Im } f$ et montrer que $(g(w_1), \dots, g(w_r))$ est une famille orthonormée de E .

(**) **Exercice 25** Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur d'un espace euclidien E . Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, pour tout x de E , $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Indication : considérer les vecteurs $x + ty$ avec $y \in \ker p$ et $x \in \text{Im } p$.

(*) **Exercice 26** Soit $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (r > 0 \text{ et } rt - s^2 > 0)$.

(**) **Exercice 27** Soient u et v des isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 1, et $t \in]0, 1[$ tel que $(1-t)u + tv \in \text{O}(E)$. Montrer que $u = v$.

(**) **Exercice 28** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^T M = I_n$. Montrer que M est inversible et symétrique, puis que $M = I_n$.

(***) **Exercice 29** Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On va montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

1. Montrer l'existence d'une telle matrice B .
2. Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Établir que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$,

$$\ker(B - \sqrt{\lambda}I_n) = \ker(A - \lambda I_n)$$

3. Justifier l'unicité de B .
-

(**) **Exercice 30** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace euclidien. Montrer que $\|f^*\|_{\text{op}} = \|f\|_{\text{op}}$.

(*) **Exercice 31** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace euclidien. On suppose que $\text{Im } f \subset \ker f$. Montrer que $\ker(f + f^*) = \ker f \cap \ker f^*$.

(*) **Exercice 32** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $\langle N_1, N_2 \rangle = \text{Tr}(N_1^T N_2)$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'adjoint de $f : M \mapsto AM$.

(*) **Exercice 33** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace euclidien. Établir la liste de propriétés suivantes :

1. $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(f^*)$
 2. $\det(f) = \det(f^*)$
 3. $\chi_f = \chi_{f^*}$
 4. $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(f^*)$
 5. pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $\dim E_\lambda(f) = \dim E_\lambda(f^*)$.
-