Feuille d'exercices n° 18 **MP**
Fonctions vectorielles **2023-2024**
Révisions d'analyse

Ce chapitre est l'occasion de réviser quelques points d'analyse de première année.

($\star$) **Exercice 1** On demande de raisonner avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.

1. Montrer que pour tout $x \leqslant 0$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2}$.
2. Montrer que pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{x^3}{6}$.
4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\left|(1+x)^{3/2} - 1 - \frac{3}{2}x\right| \leqslant x^2$.

($\star$) **Exercice 2**

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour $f : t \mapsto \sin t$ de classe $\mathcal{C}^4$ sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ avec $a = 0$ et $x \in I$. En déduire :
$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$$
2. Montrer en adaptant la démarche :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

($\star$) **Exercice 3** On demande de raisonner avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\quad \left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}\right| \leqslant \frac{x^2}{8}$.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\quad |\ln(1+x) - x| \leqslant \frac{x^2}{2}$.
3. Montrer que pour tout $u \in [-1, 1]$, $|e^{-u} - 1 + u| \leqslant \frac{3}{2}u^2$.

($\star$) **Exercice 4**
En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$, montrer que :
$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}$$

($\star\star$) **Exercice 5** a et b sont deux réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et ne s'annulant pas sur $[a, b]$.

1. Montrer que : $(f([a, b]) \subset]0, +\infty[$ ou $f([a, b]) \subset] - \infty, 0[)$.
2. Montrer :
$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } \frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

($\star\star$) **Exercice 6**
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : x \mapsto \ln(1 + x)$, montrer que $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

($\star\star$) **Exercice 7**
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1; 1]$ telle que $f(0) = 0$.

1. Soient n et k des entiers naturels non nuls, $k \in [\![1, n]\!]$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, que peut-on dire de $\left|f(\frac{k}{n^2}) - \frac{k}{n^2}f'(0)\right|$?
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2}f'(0)$.

($\star$) Exercice 8 Le but de cet exercice est l'étude de l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 1$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$$

On pose $r(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u}}$ et $h(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que $\forall x > 0$, $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$. Étudier la parité de F.
   (b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[$, $xF'(x) = -F(x) + r(x^4)$.
   (c) Montrer que pour $x > 0$, $r(x^4) \leqslant F(x)$, et en déduire que F est décroissante sur $]0, +\infty[$.
2. (a) Montrer que F est continue en 0.
   (b) i. Établir, en utilisant une formule de Taylor,

   $$\forall u \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+u}} - (1 - \frac{1}{2}u) \leqslant \frac{3}{8}u^2$$

   ii. En déduire que F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, et déterminer celui-ci.
   iii. En déduire que F est dérivable en 0 et donner $F'(0)$. Donner la position, au voisinage de 0, de la courbe représentative de F par rapport à sa tangente en 0.

($\star$) Exercice 9 Calculer la dérivée n^{e} des fonctions f, g et h suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{x+1},\ g : x \mapsto \frac{1}{3x+2},\ h : x \mapsto (2x-1)^{15},\ i : x \mapsto xe^x \text{ et } j : x \mapsto x^2e^{2x-1}$$

$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$, $g(x) = x^2e^{3x}$ et $h(x) = x^{n-1}\ln x$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ est justement l'ordre de dérivation)

($\star$) Exercice 10 Calculer la dérivée n^{e} de $f : x \mapsto \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$.

($\star$) Exercice 11 Calculer la dérivée n^{e} de $h : x \mapsto x^{2n}$ de deux façons différentes : par un calcul direct, et en écrivant $x^{2n} = x^n \times x^n$ et en utilisant la formule de Leibniz.
En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

($\star$) Exercice 12 Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$ et (H_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$H_n(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)e^{\frac{x^2}{2}}$$

1. Étudier la parité de H_n.
2. Expliciter H_0, H_1, H_2 et H_3.
3. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre H_n, H_{n+1} et H_n'.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme, dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

($\star$) Exercice 13 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, la dérivée n^{e} de f est de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$.
2. En dérivant n fois la relation $(1+x^2)f(x) = 1$, donner une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.

($\star$) Exercice 14 On considère la fonction f, définie pour $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$\forall x \neq 1,\ f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \text{ où } P_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et de coefficient dominant } (-1)^n$$

   Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
3. (a) Montrer que pour $x \neq 1$, $(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0$.
   (b) En utilisant la formule de Leibniz dans la relation précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = (n+2-x)P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x)$$

   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n' = -nP_{n-1}$.
4. Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ et P_{n-k}. En déduire que $P_n^{(k)}(1) = (-1)^k n!$.
5. Appliquer la formule de Taylor à P_n en 1. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{P_n(x)}{n!} = e^{1-x}$.

($\star\star$) Exercice 15 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que les fonctions $\|f\|$ et $\|f''\|$ sont majorées par respectivement M_0 et M_2.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $h > 0$, on a $\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leqslant \dfrac{M_2 h^2}{2}$.
   (b) En déduire que pour tout $h > 0$, la fonction $\|f'\|$ est majorée par $2\dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.
   (c) En déduire que la fonction $\|f'\|$ est majorée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.
2. Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$.
   Quelles sont les bornes de f, f', f'' sur $[0,1]$? On rajoute : $f(x) = -\cos(2(x-1))$ pour $x > 1$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et que la majoration de la question précédente est optimale.

($\star\star$) Exercice 16 Soit E un espace euclidien et v un vecteur non nul de E. Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to E$ telles que $\langle f', v\rangle$ soit une fonction constante.

($\star\star$) Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que la fonction $n : t \mapsto \|f(t)\|$ est constante. Montrer que pour tout réel t, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

($\star\star\star$) Exercice 18 Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t)^\top M(t) = I_{2n+1}$$

Montrer que la matrice $M'(t)$ n'est inversible pour aucune valeur de t.

($\star\star$) Exercice 19 Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a,b] \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ s'annulant en a. Montrer que :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|$$

(⋆⋆) **Exercice 20** Soient $a < b$ et f et g deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On pose :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et calculer $\Delta'(x)$ pour $x \in]a, b[$.
2. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$.

(⋆) **Exercice 21** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \to E$ dérivable en 0 telle que pour tout réel x, $f(2x) = 2f(x)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{f(x/2^n)-f(0)}{x/2^n-0}$. En déduire que f est linéaire.

(⋆⋆) **Exercice 22** Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|.\|$. Soit $f : [0, 1] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\|f(x_0)\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|f(t)\|$.
2. Vérifier que $f(x_0) = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x_0}^x f'(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.
3. En déduire que $\sup\limits_{[0,1]} \|f\| \leqslant \int\limits_0^1 \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$

(⋆⋆) **Exercice 23** Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et a et b réels avec $a < b$. On considère $f : [a, b] \to E$, non nulle et continue, vérifiant de plus :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| = \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

On considère le vecteur

$$e_1 = \frac{\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}{\int\limits_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t}$$

1. Montrer que e_1 est bien défini et qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.
2. On note $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$. Montrer que $f_1 \geqslant 0$ et que $f = f_1 e_1$.

(⋆⋆⋆) **Exercice 24** Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

1. Montrer que A commute avec $\exp(B)$.
2. On considère $\varphi : [0, 1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par

$$\varphi(t) = \exp(t(A + B)) \exp(-tB) \exp(-tA)$$

   (a) Justifier (soigneusement) que φ est dérivable.
   (b) Calculer $\varphi'(t)$. Calculer $\varphi(0)$. Qu'en déduit-on en prenant $B = 0$?
   (c) Montrer finalement le résultat, qui sera un résultat de cours : $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

Banque épreuve orale

Analyse : 3 et 4.
