

(♣) **Exercice 1** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$ .

(♣) **Exercice 2** Soit  $f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$ . Montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n$ .

(★★) **Exercice 3** Calcul de l'intégrale de Gauss. Soient  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt$  et  $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

1. Montrer que  $g$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ . Vérifier que  $g$  est bornée.
2. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et solution de l'équation différentielle :  $y' - 2xy = -2I$ .
3. En déduire que  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

(★★) **Exercice 4** On donne  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . On considère  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $[0, +\infty[$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. Montrer que  $f$  vérifie l'équation différentielle  $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ . En déduire l'expression de  $f$ .

(★★) **Exercice 5** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1} dx$ .

1. Justifier l'existence de l'intégrale définissant  $J_n$ .
2. Calculer  $J_{n+1} - J_n$ . En déduire l'identité  $\int_0^1 \frac{x \ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .

(★★) **Exercice 6**

Calculer  $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ .

(♣) **Exercice 7** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2} dx$ .

(★★) **Exercice 8** Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{ch} t} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ .

(★★) **Exercice 9** Pour  $x > 0$ , on pose  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ . Justifier que  $g$  est bien définie.

Montrer que  $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .

(★) **Exercice 10**

1. Montrer que pour tout réel  $y$ , on a  $|\arctan y| \leq |y|$ . On considère :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$$

2. Montrer que  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , calculer  $F'(x)$ , en déduire  $F(x)$ .

---

(★★) **Exercice 11** En travaillant sur les sommes partielles de la série, étudier la convergence et calculer la somme de la série  $\sum u_n$ , où  $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$ .

---

(★) **Exercice 12** Calculer la limite quand  $n$  tend vers l'infini des quantités suivantes.

1.  $\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$

3.  $\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$

2.  $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x dx$

4.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} dx$

---

(★★) **Exercice 13** Pour  $x > 0$ , on pose  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ .

1. Montrer que  $g$  est bien définie.

2. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $g'(x)$ .

3. En déduire  $g(x)$ .

---

(★★) **Exercice 14** Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$ .

1. Pour quelles valeurs de  $n$ , l'intégrale  $u_n$  est-elle bien définie ?

2. Calculer  $\lim u_n$ .

3. La série  $\sum u_n$  est-elle convergente ?

4. Montrer que la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge et calculer sa somme  $S$  sous forme d'une intégrale.

5. Effectuer le changement de variables  $t = \sqrt[3]{2}u$  puis calculer  $S$ .

---

(★★) **Exercice 15** On donne  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Pour  $x$  réel, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt$$

1. Montrer que  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

3. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par  $F$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

4. En déduire une expression simple de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .

---

(\*\*) **Exercice 16** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Étudier la limite quand  $n$  tend vers l'infini de  $\int_0^1 f(t^n) dt$ .

---

(\*\*\*) **Exercice 17**  $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ .

1. Donner le domaine de définition de  $f$ .
  2. Donner un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .
  3. Donner un équivalent de  $f$  en  $0^+$ .
- 

(\*) **Exercice 18**  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ .

1. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et donner une équation différentielle satisfaite par  $g$ .
  2. Déterminer un équivalent de  $g$  en  $+\infty$ .
- 

(\*) **Exercice 19** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $J_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t+\dots+t^n}} dt$ .

1. Montrer que la suite  $(J_n)$  est bien définie et calculer  $J_1$ .
  2. Déterminer la limite  $\ell$  de la suite  $(J_n)$ .
- 

(\*) **Exercice 20** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et bornée. On appelle *transformée de Laplace* de  $f$  l'application  $L(f)$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

1. Montrer que  $L(f)$  est bien définie, et continue sur  $]0, +\infty[$ .
  2. Déterminer la limite de  $xL(f)(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
  3. On suppose que  $f$  admet la limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . Déterminer la limite de  $xL(f)(x)$  quand  $x$  tend vers  $0^+$ .
- 

(\*) **Exercice 21** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$ .

1. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
  2. À l'aide du changement de variables  $u = t^n$ , déterminer un équivalent de  $I_n$ . L'équivalent obtenu sera donné à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.
- 

(\*\*) **Exercice 22** Soit  $I = \int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt$ . Montrer que l'intégrale  $I$  converge. Montrer que  $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ .

---

(\*\*) **Exercice 23** On note  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du$ .

1. Montrer que  $\psi : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$  est intégrable sur  $I = ]0, +\infty[$ .

2. Déterminer les valeurs du réel  $x$  pour lesquelles  $F(x)$  est bien défini.
3. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et exprimer  $F'(x)$  sous forme intégrale.

(\*\*) **Exercice 24** Pour  $x > 0$ , on pose  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ . On note  $f(x, t) = \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$ .

1. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et exprimer  $g'(x)$  sous forme intégrale.
2. Calculer  $\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt$  et en déduire  $g'(x)$ .
3. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ , ainsi que l'expression de  $g$  à l'aide de fonctions usuelles.
4. En déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t} dt$ .

(\*\*) **Exercice 25** Développer en série  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$ .

(\*) **Exercice 26** Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a  $\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$ .

En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$ .

(\*\*) **Exercice 27** Établir l'identité  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ .

(\*\*) **Exercice 28** Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ .

1. Donner le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n x^n$ .
2. Calculer la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour  $|x| < R$ .

(\*) **Exercice 29**  $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) dt$ . On donne :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \text{ pour } a > 0, \text{ et } \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \text{ pour } a > 0$$

Enfin, on donne  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

1. Donner le domaine de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement en série entière.
3. En déduire l'expression de  $f$  à l'aide de fonctions usuelles.

Banque épreuve orale

Analyse : 19, 25, 26, 27, 29, 30, 49, 50.