Feuille d'exercices n° 16 **MP**
Moments de variables aléatoires **2023-2024**

(✍) Exercice 1 Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Pour X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, calculer $E(2^X)$ et $E(\frac{1}{1+X})$.

(⋆) Exercice 2 Soit $n \geqslant 3$, $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On dispose d'une pièce donnant « Pile » avec la probabilité p et « Face » avec la probabilité q. On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

— soit si l'on a obtenu « Pile » ;

— soit si l'on a obtenu n fois « Face ».

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au k^{e} lancer ».
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n.
   (a) Pour tout k de $[\![2, n-1]\!]$, déterminer la probabilité $P(T_n = k)$.
   (b) Déterminer aussi $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = n)$.
   (c) Vérifier que $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
2. Loi de X_n. Donner la loi de X_n et vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. Loi de Y_n.
   (a) Déterminer, pour tout k de $[\![0; n-1]\!]$, la probabilité $P(Y_n = k)$, ainsi que $P(Y_n = n)$.
   (b) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n. En déduire $E(Y_n)$.
4. Compléter le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T_n.

```
import numpy.random as rd
def simulation(n: int, p: float):
    '''
    retourne la valeur prise par Tn
    '''
    x, y, t = 0, 0, 0
    while ...................:
        t = .................
        if rd.random() < ....:
            .................
    return t
```

(⋆⋆) Exercice 3 Soient a et b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

— si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;

— si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :
B_n l'événement « la n-ième boule tirée est blanche » ;
X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages et $u_n = E(X_n)$.

I. Étude d'un ensemble de suites

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s x_{n+1} = (s-1)x_n + b + n$$

1. Soient α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $v_n = \alpha n + \beta$.
   Déterminer en fonction de b et s les valeurs de α et β pour que la suite v appartienne à A.
2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente, et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = x_n - v_n$.
   Montrer que la suite y est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel non nul n, y_n en fonction de x_1, b, s et n. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = n + b - s + (x_1 - 1 - b + s)\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}$$

II. Expression de la probabilité $P(B_{n+1})$ à l'aide de u_n

1. Donner, en fonction de b et de s, les valeurs de $P(B_1)$ et de u_1. Vérifier que $P(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.
2. Soit n un entier naturel non nul vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$.
   Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$. En déduire l'égalité :
   $P(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$.
3. Soit n un entier tel que $n > a$.
   Si $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?
   Si $k \in [\![n-a, n]\!]$, justifier l'égalité : $P_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.
   Montrer enfin que l'égalité : $P(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

III. Calcul des nombres u_n et $P(B_n)$

1. Soit n un entier naturel, $n \geqslant a$. Établir, pour tout $k \in [\![n+1-a, n]\!]$, l'égalité :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{a-n+k}{s} P(X_n = k) + \frac{b+n-k+1}{s} P(X_n = k-1)$$

   On admet que cette égalité est encore vraie pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour $k \in [\![0, n-a-1]\!]$.

   On admet que ces égalités sont également vraies dans le cas où $n < a$, ce qui, en résumé, nous donne les relations (R) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; \forall k \in [\![0, n+1]\!] \;\; P(X_{n+1} = k) = \frac{a-n+k}{s} P(X_n = k) + \frac{b+n-k+1}{s} P(X_n = k-1)$$

2. Calculer alors, pour n entier naturel non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n.
   En déduire que la suite u appartient à l'ensemble A étudié dans la partie I.
3. Donner alors les valeurs de u_n et $P(B_{n+1})$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de b, s et n.

($\star$) Exercice 4 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Justifier que $\dfrac{X}{1+Y}$ a une espérance finie, et la calculer.

($\star$) **Exercice 5** Trois personnes a_1, a_2 et a_3 entrent à l'instant 0 dans un bureau de poste qui ne comporte que deux guichets. Les personnes a_1 et a_2 peuvent être servies immédiatement alors que a_3 doit attendre qu'un guichet se libère pour être servie. Dans la modélisation de cet exercice, le temps est mesuré par des nombres entiers avec une unité fixée.
Soit $p \in]0,1[$. On suppose que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, le temps de service de la personne a_i est une variable aléatoire X_i pour laquelle

$$X_i(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(X_i = k) = (1-p)p^k$$

On pose $q = 1-p$. Enfin, X_1, X_2 et X_3 sont supposées indépendantes.
On désigne par Y l'instant de la première sortie (qui est aussi l'instant où a_3 commence à se faire servir) et par Z l'instant de sortie de a_3.

1. Exprimer l'événement $(Y \geqslant k)$ à l'aide de X_1 et X_2. Calculer, pour $k \geqslant 0$, $P(Y \geqslant k)$. En déduire la loi de Y.
2. Exprimer Z en fonction de Y et X_3. Déterminer la loi de Z.
3. Calculer le temps moyen passé au bureau de poste de a_3.

($\star$) **Exercice 6** On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de face obtenu lors des deux premiers lancers et Y la variable aléatoire égale au nombre de face obtenu lors des deux derniers lancers.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y) dans un tableau à double entrée.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Retrouver le résultat du 2.

($\star$) **Exercice 7** Une urne contient des boules rouges en proportion 1/3, des boules blanches en proportion 1/3 et des boules vertes. On tire avec remise n boules (où n est fixé dans $\mathbb{N}^*$) dans cette urne. On considère les variables aléatoires :

— R égale au nombre de boules rouges obtenues

— B égale au nombre de boules blanches obtenues.

Donner les lois de R, B et $X = R + B$. En déduire la covariance du couple (R,B).

(✍) **Exercice 8** Soient X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes deux à deux, de même loi et admettant une variance $\sigma^2 > 0$. On considère les variables aléatoires :

$$T = X + Y \text{ et } U = X + Z$$

Calculer la covariance du couple (T,U).

($\star\star$) **Exercice 9** Une urne contient des boules noires et des boules rouges. On tire indéfiniment et avec remise des boules de l'urne. On note p (où $p \in]0,1[$) la proportion de boules rouges, R (respectivement N) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge (resp. noire).

1. Démontrer que R et N ne sont pas indépendantes.
2. Calculer $E(RN)$ (on admet que cette espérance existe) à l'aide du théorème du transfert. En déduire $\mathrm{Cov}(R,N)$ et retrouver le résultat de la question précédente.

($\star$) **Exercice 10** On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée de sorte que la probabilité d'apparition de Pile soit égale à p, $p \in]0;1[$. Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance n fois la pièce. On définit trois variables aléatoires :

Z égale au nombre de 6 obtenus aux lancers de dé ;
X égale au nombre de Pile obtenus aux lancers de la pièce ;
Y égale au nombre de Face obtenus aux lancers de la pièce ;

On convient que si $Z = 0$, alors $X = Y = 0$.

1. Donner la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Pour k et n entiers naturels, donner $P_{(Z=n)}(X=k)$ (on distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$).
3. Montrer que :
   — si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors
$$P((X=k)\cap(Z=n)) = \binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
   — si $n > N$ ou $k > n$ alors $P((X=k)\cap(Z=n)) = 0$.

4. Calculer $P(X=0)$.
5. Montrer que pour tout couple d'entiers (k,n) tels que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, on a : $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$. En déduire $P(X=k)$.
6. Vérifier que $X \sim \mathcal{B}(N, \frac{p}{6})$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
8. Déterminer la loi du couple (X,Y).
9. Calculer $V(X+Y)$; en déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

($\star\star$) Exercice 11 On considère une urne comportant 1/3 de boules vertes et 2/3 de boules blanches. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On définit, pour j compris entre 1 et n, la variable aléatoire Y_j par :

$$\begin{cases} Y_j = 1 \text{ si les tirages } j \text{ et } j+1 \text{ donnent des couleurs différentes} \\ Y_j = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Donner la loi de Y_j , son espérance et sa variance.
2. Donner la loi conjointe de (Y_j, Y_{j+1}) et calculer $\mathrm{Cov}(Y_j, Y_{j+1})$ pour j compris entre 1 et $n-1$.
3. Soit Z_n le nombre de changements de couleur dans la suite des $n+1$ tirages.
   Calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

($\star$) Exercice 12 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $T_n = e^{-S_n/n}$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n)$.

($\star\star$) Exercice 13 On admet, ce qui est montré dans un autre exercice de la feuille, que :

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}$$

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires telles que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p_k avec $0 < p_k < 1$. On pose $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $V(Y_n) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$.

($\star\star$) Exercice 14 Pour cet exercice, on admet, ce qui a été montré en classe, que la somme de variables aléatoires indépendantes de lois binomiales $\mathcal{B}(n_1,p),\ldots,\mathcal{B}(n_{,r},p)$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n_1+\cdots+n_r,p)$.

On dispose d'une urne contenant 2 boules, l'une numérotée 1, l'autre numérotée 2. On y effectue une succession de tirages au hasard d'une boule en notant le numéro obtenu, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. La suite aléatoire des numéros tirés fournit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (somme des numéros obtenus au cours des n premiers tirages).
Un entier naturel non nul N étant donné, on considère la variable aléatoire T_N égale au rang n où, pour la première fois, on a $S_n > N$.

1. Espérance de T_N.
   (a) Déterminer $T_N(\Omega)$ dans le cas où N est pair, dans le cas où N est impair.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité :
   $$P(T_{N+2} = k) = \frac{1}{2}P(T_{N+1} = k-1) + \frac{1}{2}P(T_N = k-1)$$
   (c) En déduire : $E(T_{N+2}) = \frac{1}{2}E(T_N) + \frac{1}{2}E(T_{N+1}) + 1$.
   (d) Calculer $E(T_0)$ et $E(T_1)$. Écrire une fonction *Python* de paramètre d'entrée N et renvoyant $E(T_N)$.
2. Loi de T_N.
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, justifier : $P(T_N > k) = P(S_k \leqslant N)$.
   (b) En déduire que $P(T_N > k) = P(Z_k \leqslant N-k)$, où Z_k est une variable aléatoire suivant une loi usuelle de paramètre(s) à préciser.
   (c) En déduire $P(T_N > k)$ sous forme de somme. Donner la loi de T_N.

($\star$) Exercice 15 n personnes (où $n \in \mathbb{N}^*$) se rendent au cinéma et choisissent chacune de manière équiprobable l'une des trois salles. Les choix des personnes sont indépendants. On note X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes choisissant la salle n$^{\text{o}}$ i.

1. Donner la loi de X_i. Les X_i sont-elles 2 à 2 indépendantes ?
2. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$? Quelle est sa variance ? En déduire $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
3. Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? En déduire $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2 + X_3, X_1)$.
   En développant $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2 + X_3, X_1)$, retrouver alors $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

($\star\star$) Exercice 16 On place n boules dans n boîtes numérotées de 1 à n selon le protocole suivant : chaque boule est placée uniformément et indépendamment des autres boules (une boîte pouvant contenir plusieurs boules). Si U_i désigne le numéro de la boîte contenant la boule numéro i, les variables aléatoires U_i sont ainsi indépendantes et suivent chacune la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans la boîte numéro i. On pose $N = \sup(N_1, N_2, \ldots, N_n)$, de sorte que N est la variable aléatoire égale au plus grand nombre de boules contenues dans une des n boîtes.

1. (a) Donner la loi de N_i, pour tout i compris entre 1 et n.
   (b) Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sont-elles indépendantes ?
   (c) Montrer que pour tout réel α compris entre 1 et n, on a :
   $$E(N) \leqslant nP(N > \alpha) + \alpha$$
   Vérifier que cette inégalité est encore valable pour $\alpha > n$.
2. (a) Établir que pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P(N = k) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} P(N_i = k) \leqslant \frac{n}{k!}$.
   (b) À l'aide d'une loi usuelle, montrer que pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k!} \leqslant (\frac{e}{k})^k$.
   (c) En déduire que pour tout réel α supérieur ou égal à 1,
   $$P(N > \alpha) \leqslant n^2 \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}$$
3. (a) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ de réels de $[1, +\infty[$ telle que pour tout entier naturel k non nul,
   $$\left(\frac{e}{\alpha_k}\right)^{\alpha_k} = \frac{1}{k^3}$$
   (b) Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = +\infty$, puis montrer que $\alpha_k \sim 3\frac{\ln k}{\ln(\ln k)}$.

4. Démontrer finalement l'existence d'une constante C telle que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :
$$E(N) \leqslant C\frac{\ln n}{\ln(\ln n)}$$

($\star\star$) Exercice 17

1. Quel lien y a-t-il entre l'indépendance de deux variables aléatoires et la nullité de leur covariance ?
2. Soient deux variables aléatoires X et Y suivant chacune une loi de Bernoulli. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.
3. Soit $n \geqslant 3$, entier. Une urne contient des boules rouges et des blanches en proportions respectives r et b, avec $0 < r < 1$ et $b = 1 - r$.
Un joueur effectue n tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à chaque étape du tirage.
Pour $k \geqslant 2$, le joueur gagne un point au k^{e} tirage si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Sinon, son gain à ce rang du tirage est nul.
Soit G la variable aléatoire égale au nombre de points gagnés par le joueur au cours des n tirages.
   (a) Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on définit la variable aléatoire X_k égale au gain du joueur pour le tirage de rang k. Préciser la loi de X_k et calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1})$ pour $k \in [\![2, n-1]\!]$.
   X_k et X_{k+1} sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer l'espérance et la variance de G.

($\star\star$) Exercice 18 Soit X une variable aléatoire discrète strictement positive. Montrer que $E(X)E(\frac{1}{X}) \geqslant 1$. Étudier le cas d'égalité.

($\star\star$) Exercice 19 Soient X et Y dans L^2.

1. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$.
2. Montrer que si $V(X) \neq 0$, l'égalité $\mathrm{Cov}(X, Y)^2 = V(X)V(Y)$ est obtenue si, et seulement si, il existe a et b réels tels que $Y = aX + b$ presque-sûrement.

($\star\star$) Exercice 20 Soit X une variable aléatoire discrète positive, d'espérance finie.

1. Montrer que $P(X \geqslant x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\frac{1}{x})$.
2. Dans le cas où X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que $P(X \geqslant x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{x})$.
3. Dans le cas général, montrer à l'aide de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$ que $P(X \geqslant x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{x})$.

($\star\star$) Exercice 21 On lance une pièce de monnaie (donnant Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$) jusqu'à l'obtention du premier Pile. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaire. Si N prend la valeur n, on relance n fois la pièce et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de piles obtenu.

1. Déterminer la loi de N, celle du couple (N, X).
2. Déterminer la loi de X (on distinguera $P(X = 0)$ des autres valeurs).
3. Montrer que X a même loi que le produit de deux variables aléatoires indépendantes Y et Z telles que Y suive une loi de Bernoulli et Z une loi géométrique de même paramètre.
4. En déduire l'espérance et la variance de X.

($\star$) Exercice 22 Dans une petite salle de réunion, il arrive X personnes, où X suit une loi géométrique de paramètre p. La capacité de la salle est de n places. On note Y le nombre de personnes ne pouvant pas prendre place dans la salle.
Déterminer la loi de Y, sa fonction génératrice, puis son espérance.

(⋆⋆) Exercice 23

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel a pour lequel
$$P(X=k) = a\binom{k+r-1}{k}(1-p)^k \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$
Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la fonction génératrice de X et retrouver ces deux derniers résultats.

(⋆⋆) Exercice 24 Problème du collectionneur.
Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte N images distinctes.

1. Montrer qu'il est presque sûr qu'un acheteur obtienne la collection complète en un nombre fini d'achats.
2. Pour $k \in [\![1,N]\!]$, on note X_k le nombre d'achats ayant permis d'obtenir k images distinctes. En particulier, $W_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.
   (a) Soit $k \in [\![1,N-1]\!]$. Reconnaître la loi de $X_{k+1} - X_k$.
   (b) En déduire une expression de l'espérance de X_N.

(⋆⋆) Exercice 25 Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires discrètes de L^2. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $m_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Montrons que cette matrice est diagonalisable et à valeurs propres positives.

(⋆⋆) Exercice 26 Soit Y une variable aléatoire réelle discrète. Montrer que pour tout $t > 0$, tout $a > 0$, $P(Y \geqslant a) \leqslant e^{-ta}E(e^{tY})$.

(⋆⋆) Exercice 27 Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2.

1. On suppose que $E(X) = 0$.
   (a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $E((X+u)^2) = V(X) + u^2$.
   (b) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{V(X)+u^2}{(\lambda+u)^2}$.
   (c) En déduire que $P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{V(X)}{\lambda^2+V(X)}$.
2. On ne suppose plus que $E(X) = 0$. Montrer que $P(X - E(X) \geqslant \lambda) \leqslant \frac{V(X)}{\lambda^2+V(X)}$.

(⋆) Exercice 28 On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.

1. Donner son rayon de convergence R.
2. Calculer sa somme $S(t)$ pour $t \in]-R,R[$.
3. On se donne une variable aléatoire X telle que pour tout $t \in [-1,1]$, $G_X(t) = aS(t)$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer a, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

(⋆⋆⋆) Exercice 29 On considère un point se déplaçant sur un axe. Au temps $n = 0$, il se trouve à l'origine. Il se déplace ensuite successivement d'une unité vers la droite avec une probabilité p et d'une unité vers la gauche avec une probabilité $1-p$. On note S_n sa position après n déplacements.

1. Déterminer la loi de S_0, S_1 et S_2. Plus généralement, déterminer la loi de S_n.

2. Donner la probabilité p_n de l'événement $(S_n = 0)$.
3. Justifier que $P : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ est définie sur $]-1,1[$ et calculer $P(t)$ pour $t \in]-1,1[$.
   Indication : chercher du côté de $(1-x)^{-1/2}$.
4. On note T l'instant où le point retourne pour la première fois à l'origine (on convient que $T = +\infty$ si le point ne retourne jamais à l'origine) et on pose $q_n = P(T = n)$.
   Justifier que $Q : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n t^n$ est définie et continue sur $[-1,1]$.
5. Montrer que $P(t) = 1 + P(t)Q(t)$ pour $t \in]-1,1[$.
6. En déduire la valeur de q_n.
7. Calculer la probabilité que le point retourne à l'origine.
8. L'espérance du temps de premier retour à l'origine est-elle finie ?

($\star\star$) **Exercice 30** Soit N un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$, on note $q = 1-p$. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (1-q^n)^N$.

1. Montrer la convergence de la série de terme général u_n. On pose $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On considère N urnes $U_1, \dots, U_N$ identiques. Chacune contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion q.
On effectue des tirages avec remise dans ces urnes. On procède de la manière suivante :
• au premier tirage, on tire une boule de chaque urne ;
• au deuxième tirage, on tire une boule de chaque urne où une boule noire a été tirée au tirage précédent ;
• et ainsi de suite ...

On note X_k le nombre d'épreuves nécessaires pour tirer une boule blanche de l'urne U_k et Y le nombre d'épreuves nécessaires pour tirer une boule blanche dans chacune des N urnes.

2. Exprimer Y en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_N$.
   Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $P(Y \leqslant n)$. Déterminer la loi de Y.
3. Montrer l'existence de $E(Y)$ et donner son expression en fonction de M.

Banque épreuve orale

Probabilités : 96, 97 question 2, 99, 100, 104, 110.
