

(★) **Exercice 1** Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}$ et donner sa somme.

(★★) **Exercice 2** Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum \left(\frac{\sin n}{n}\right) z^n$
2. $\sum \left(\tan \frac{n\pi}{7}\right) z^n$
3. $\sum d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs positifs de n
4. $\sum a_n z^n$ où a_n est la n -ième décimale de π .

(★★) **Exercice 3** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum z^{n^2}$
2. $\sum 2^n z^{2^n}$
3. $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

(★) **Exercice 4** Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n$.

(★) à (★★★) **Exercice 5** Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme pour

1. $\sum_{n \geq 1} nx^n$
2. $\sum_{n \geq 1} 2nx^{2^n}$
3. $\sum_{n \geq 1} 2n^{(-1)^n} x^{2^n}$

(★★) **Exercice 6** Déterminer le rayon de convergence, et calculer la somme, pour $\sum \frac{n^2 - 4n - 1}{n + 2} x^n$.

(★★★) **Exercice 7** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{x^n}{2n+1}$, et déterminer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ pour $x \in]-R, R[$. On s'aidera de $\sum_{n \geq 0} x^{2^n}$.

(★) **Exercice 8** Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{\text{ch}(n)}{n} z^n$ et $\sum \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$.

(★) **Exercice 9** Calculer les dérivées n -ième en 0 de $f : x \mapsto e^{x^2}$.

(★) **Exercice 10** Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{x^2}{e^x - 1 - x}$ sont prolongeables en des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

(★★) **Exercice 11** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$.
2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.

(**) **Exercice 12** Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], |f^{(n)}(x)| \leq MK^n n!$$

avec $M \geq 0, K > 0$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

(**) **Exercice 13** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme S . On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0, 1[$.

1. Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
 2. Montrer que la fonction S est définie et continue sur $[-1, 1]$.
-

(*) **Exercice 14**

1. Rappeler le développement en série entière de Arctan sur $] -1, 1[$. Comment retrouve-t-on ce résultat ?
 2. On considère la série entière $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$. Donner son rayon de convergence R et calculer sa somme $f(x)$. On exprimera $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
 3. Que peut-on dire de la convergence sur $[-R, R]$?
 4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.
-

(*) **Exercice 15** Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------|------------------------|
| 1. $\ln(1 + 2x^2)$ | 3. $\ln(a + x)$ où $a > 0$ | 5. $\ln(1 + x - 2x^2)$ |
| 2. $\frac{1}{a - x}$ si $a \neq 0$ | 4. $\frac{e^x}{1 - x}$ | 6. $(4 + x^2)^{-3/2}$ |
-

(**) **Exercice 16** Développer en série entière $f : x \mapsto \frac{x^2 + x - 3}{(x - 2)^2(2x - 1)}$ et préciser le rayon de convergence obtenu.

(*) **Exercice 17** Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f .
 2. Préciser l'intervalle de définition de f .
 3. Établir la continuité de f sur son domaine de définition.
 4. Déterminer la limite de f en 1.
-

(***) **Exercice 18** À l'aide d'un développement en série entière de f' , déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$.

(**) **Exercice 19** Donner les développements en série entière au voisinage de 0 des fonctions rationnelles qui suivent :

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| 1. $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)^2}$ | 2. $g(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ |
|------------------------------------|-------------------------------|
-

(*) **Exercice 20** À l'aide d'un développement en série entière, justifier que la fonction g est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Calculer ses dérivées successives en 0.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(***) **Exercice 21** Soit $f(x)$ la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g .
 2. Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.
-

(**) **Exercice 22** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n$ et calculer sa somme.

(**) **Exercice 23** Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

2. Montrer que f admet un prolongement g de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 3. Montrer que g n'est pas développable en série entière.
-

(***) **Exercice 24**

Calculer, pour $x \in]-1, 1[$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

(**) **Exercice 25** Soit $f(x) = \text{sh}(\arcsin(x))$.

1. Donner une équation différentielle linéaire d'ordre 2 satisfaite par f et rappeler les conditions initiales.
 2. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0, et déterminer ce développement.
-

(*) **Exercice 26** Rechercher une solution développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$. Qu'en déduit-on ?

(**) **Exercice 27** À l'aide d'une équation différentielle, développer en série entière $f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Préciser le rayon de convergence.

(*) **Exercice 28** Montrer qu'il existe une unique série entière de rayon de convergence $+\infty$ dont la somme f vérifie :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad x f''(x) + f'(x) + f(x) = 0$$

(**) **Exercice 29**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ et $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$. Déterminer une équation différentielle du premier ordre avec second membre vérifiée par f sur son intervalle ouvert de convergence. Pour cela, on commencera par établir la relation de récurrence entre a_n et a_{n-1} : $2(2n-1)a_n = na_{n-1}$.
-

(★★) **Exercice 30** Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence par $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}.$$

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence R strictement positif et on note $f(x)$ sa somme. Montrer qu'au voisinage de 0, on a :

$$xf(x)^2 = f(x) - 1 \quad \text{puis} \quad f(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1 - 4x})$$

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1 - 4x})$ prolongée par continuité en 0 est développable en série entière au voisinage en 0. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

(★★) **Exercice 31** Établir l'identité

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

(★★) **Exercice 32** Soit α réel et $f : x \mapsto \cos(2\alpha \arcsin x)$ sur $[-1, 1]$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.
 2. En déduire le développement en série entière de f sur $] -1, 1[$.
-

Banque épreuve orale CCINP

Analyse : 2, 15 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 47, 51.
