
(✍) **Exercice 1** Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$ et donner sa somme.

(⋆⋆) **Exercice 2** Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum(\frac{\sin n}{n})\, z^n$
2. $\sum(\tan\frac{n\pi}{7})\, z^n$
3. $\sum d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs positifs de n
4. $\sum a_n z^n$ où a_n est la n-ième décimale de π.

(⋆⋆) **Exercice 3** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum z^{n^2}$
2. $\sum 2^n z^{2^n}$
3. $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

(⋆) **Exercice 4** Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\cos(\frac{n\pi}{2})x^n$.

(⋆) **à** (⋆⋆⋆) **Exercice 5** Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme pour

1. $\sum_{n\geqslant 1} nx^n$
2. $\sum_{n\geqslant 1} 2nx^{2n}$
3. $\sum_{n\geqslant 1} 2n^{(-1)^n}x^{2n}$

(⋆⋆) **Exercice 6** Déterminer le rayon de convergence, et calculer la somme, pour $\sum \frac{n^2-4n-1}{n+2}x^n$.

(⋆⋆⋆) **Exercice 7** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{x^n}{2n+1}$, et déterminer $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ pour $x\in]-R,R[$. On s'aidera de $\sum_{n\geqslant 0}x^{2n}$.

(⋆) **Exercice 8** Déterminer le rayon de convergence de $\sum\frac{\mathrm{ch}(n)}{n}z^n$ et $\sum\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$.

(⋆) **Exercice 9** Calculer les dérivées n-ième en 0 de $f : x\mapsto e^{x^2}$.

(⋆) **Exercice 10** Montrer que les fonctions $f : x\mapsto \frac{e^x-1-x}{x^2}$ et $g : x\mapsto\frac{x^2}{e^x-1-x}$ sont prolongeables en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(⋆⋆) **Exercice 11** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=3$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\frac{u_n}{n!}\leqslant 4^{n+1}$.
2. Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'=y^2$.

($\star\star$) **Exercice 12** Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ |f^{(n)}(x)| \leqslant MK^n n!$$

avec $M \geqslant 0$, $K > 0$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

($\star\star$) **Exercice 13** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme S. On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0,1[$.

1. Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
2. Montrer que la fonction S est définie et continue sur $[-1,1]$.

($\star$) **Exercice 14**

1. Rappeler le développement en série entière de Arctan sur $]-1,1[$. Comment retrouve-t-on ce résultat ?
2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$. Donner son rayon de convergence R et calculer sa somme $f(x)$. On exprimera $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
3. Que peut-on dire de la convergence sur $[-R,R]$?
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

($\star$) **Exercice 15** Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$
2. $\dfrac{1}{a-x}$ si $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ où $a > 0$
4. $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$
6. $(4+x^2)^{-3/2}$

($\star\star$) **Exercice 16** Développer en série entière $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence obtenu.

($\star$) **Exercice 17** Pour x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f.
2. Préciser l'intervalle de définition de f.
3. Établir la continuité de f sur son domaine de définition.
4. Déterminer la limite de f en 1.

($\star\star\star$) **Exercice 18** À l'aide d'un développement en série entière de f', déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$.

($\star\star$) **Exercice 19** Donner les développements en série entière au voisinage de 0 des fonctions rationnelles qui suivent :

1. $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-1)^2}$
2. $g(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$

($\star$) **Exercice 20** À l'aide d'un développement en série entière, justifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculer ses dérivées successives en 0.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

($\star\star\star$) **Exercice 21** Soit $f(x)$ la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.
2. Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

($\star\star$) **Exercice 22** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$ et calculer sa somme.

($\star\star$) **Exercice 23** Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

2. Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que g n'est pas développable en série entière.

($\star\star\star$) **Exercice 24**

Calculer, pour $x \in]-1,1[$, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

($\star\star$) **Exercice 25** Soit $f(x) = \operatorname{sh}(\arcsin(x))$.

1. Donner une équation différentielle linéaire d'ordre 2 satisfaite par f et rappeler les conditions initiales.
2. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0, et déterminer ce développement.

($\star$) **Exercice 26** Rechercher une solution développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$. Qu'en déduit-on ?

($\star\star$) **Exercice 27** À l'aide d'une équation différentielle, développer en série entière $f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Préciser le rayon de convergence.

($\star$) **Exercice 28** Montrer qu'il existe une unique série entière de rayon de convergence $+\infty$ dont la somme f vérifie :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad xf''(x) + f'(x) + f(x) = 0$$

($\star\star$) **Exercice 29**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ et $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$. Déterminer une équation différentielle du premier ordre avec second membre vérifiée par f sur son intervalle ouvert de convergence. Pour cela, on commencera par établir la relation de récurrence entre a_n et a_{n-1} : $2(2n-1)a_n = na_{n-1}$.

(⋆⋆) Exercice 30 Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence par $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence R strictement positif et on note $f(x)$ sa somme. Montrer qu'au voisinage de 0, on a :

$$xf(x)^2 = f(x) - 1 \quad \text{puis} \quad f(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$$

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$ prolongée par continuité en 0 est développable en série entière au voisinage en 0. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

(⋆⋆) Exercice 31 Établir l'identité

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

(⋆⋆) Exercice 32 Soit α réel et $f : x \mapsto \cos(2\alpha \arcsin x)$ sur $[-1, 1]$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.
2. En déduire le développement en série entière de f sur $]-1, 1[$.

Banque épreuve orale

Analyse : 2, 15 18, 20, 21, 22, 23, 24, 47, (51).
