
(★) **Exercice 1** Les lettres b, c, r désignent des entiers naturels non nuls fixés.

Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges, toutes indiscernables au toucher.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, c boules de la couleur qui vient d'être tirée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ?

(★) **Exercice 2**

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le numéro k , avant de procéder au tirage suivant, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k .

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n de toutes ses boules.

On note N_i la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée au i -ième tirage.

1. Donner la loi de X_1 , la loi de X_2 et leurs espérances.
2. Déterminer la loi de X_3 et calculer $E(X_3)$.
3. On se place dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

(★) **Exercice 3**

On effectue une infinité de lancers d'une pièce équilibrée. Pour $n \geq 2$, on note A_n l'événement : « au cours des n premiers lancers, aucun Face n'est suivi d'un Pile ».

1. Exprimer l'événement A_n à l'aide d'unions, intersections d'événements $(P_k, F_k)_{1 \leq k \leq n}$, où F_k (resp. P_k) désigne : « on obtient Face (resp. Pile) au k -ième lancer ».
2. Calculer alors $P(A_n)$.

(★) **Exercice 4**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un nombre entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient deux boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard de U_1 et on la met dans U_2 , puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; ces deux opérations constituent une épreuve. On considère l'évènement A : « Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

Introduire des notations appropriées et présenter l'évènement A avec ces notations. Calculer $P(A)$.
