Feuille d'exercices n° 14 **MP**
Probabilités **2024-2025**
Lois de variables aléatoires discrètes

Événements et probabilités (sans variables aléatoires)

($\star$) **Exercice 1** Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Pierre et Marie se rendent indépendamment l'un de l'autre sur un même lieu de vacances. Les jours d'arrivée possibles pour chacun d'eux sont numérotés de 1 à $n-2$. Ils choisissent chacun leur jour d'arrivée au hasard, restent sur place 3 jours, et repartent. On note A_k (respectivement B_k) l'événement « Marie (respectivement Pierre) arrive le jour k ».

1. Soit E l'événement « Pierre et Marie arrivent le même jour ». Exprimer E en fonction des événements A_k et B_k. Calculer ensuite $P(E)$.
2. Calculer de même la probabilité de l'événement F « Pierre et Marie arrivent avec un jour d'écart ».
3. Calculer de même la probabilité de l'événement G « Pierre et Marie arrivent avec deux jours d'écart ».

($\star$) **Exercice 2** Un joueur joue à Pile ou Face avec la règle suivante :

— il gagne dès que la séquence Pile-Face sort ;

— il perd dès que la séquence Face-Pile sort.

On arrête la partie dès que l'un des deux cas précédents se présente.
La pièce amène Pile avec probabilité $p \in]0;1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit A_n l'événement « la partie comporte au moins n lancers ». Calculer $P(A_n)$ (on distinguera $n=1$ de $n \geqslant 2$).
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit B_n l'événement « le joueur gagne au n^{e} lancer ». Calculer $P(B_n)$.
3. Soient B l'événement « le joueur gagne la partie », C l'événement « le joueur perd la partie » et D l'événement « la partie dure indéfiniment ».
Calculer $P(B)$. Calculer $P(C)$. Calculer $P(D)$ par deux méthodes différentes.

($\star$) **Exercice 3** Au casino, une roulette comporte 18 numéros noirs, 18 numéros rouges et un vert.
Au jeu de roulette française :

— si le numéro sorti est noir, on gagne (et on arrête le jeu) ;

— si le numéro sorti est rouge, on perd (et on arrête le jeu) ;

— si le numéro sorti est vert, la mise est « prisonnière » et l'on relance la roulette jusqu'à obtenir un numéro noir ou rouge.

Calculer la probabilité que le jeu dure indéfiniment.

($\star$) **Exercice 4** *Les deux questions sont indépendantes.*

1. On lance un dé indéfiniment. Quelle est la probabilité que les nombres obtenus soient tous pairs ?
2. On lance un dé jusqu'à obtenir 6. Quelle est la probabilité que les nombres obtenus soient tous pairs ?

($\star$) **Exercice 5** On dispose d'une infinité d'urnes numérotées $1, 2, 3....$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'urne n contient 3^n boules, réparties en 1 boule blanche et $3^n - 1$ boules vertes. On choisit une urne, de telle sorte que la probabilité de choisir l'urne n est $\frac{1}{2^n}$, puis on tire une boule dans cette urne.

$$\begin{array}{rcl} E & = & \text{« on obtient une boule blanche »} \\ F & = & \text{« on choisit une urne ayant un numéro impair et on obtient une boule verte »} \end{array}$$

Pariez-vous sur l'événement E ou sur l'événement F ?

($\star\star$) Exercice 6 On effectue une infinité de lancers d'une pièce équilibrée. Pour $n \geqslant 2$, on note A_n l'événement : « au cours des n premiers lancers, aucun Face n'est suivi d'un Pile ».

1. Exprimer l'événement A_n à l'aide d'unions, intersections d'événements $(P_k, F_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, où F_k (resp. P_k) désigne : « on obtient Face (resp. Pile) au k-ième lancer ».
2. Calculer alors $P(A_n)$.
3. En déduire la probabilité de l'événement B : « au cours de l'infinité des lancers, Face n'est jamais suivi de Pile ».

($\star$) Exercice 7 Un joueur joue à pile ou face avec deux pièces A et B.
Pour le premier lancer, il choisit une pièce au hasard. Par la suite, il utilisera la même pièce qu'au coup précédent en cas de pile et il changera de pièce en cas de face.
Soient a et b les probabilités de pile des pièces A et B avec $a + b < 1$.
Calculer la probabilité d'utiliser la pièce A au n-ième lancer, puis la probabilité d'obtenir pile au $n^{\text{ième}}$ lancer.

($\star\star$) Exercice 8 *Le trousseau de clefs.*
Une personne se trouve devant une porte fermée à clef. Elle dispose d'un trousseau de n clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle essaie les clefs au hasard l'une après l'autre. En cas d'échec, elle ne réutilise pas la clé essayée.
Quelle est la probabilité p_k qu'elle ouvre la porte au $k^{\text{ième}}$ essai ? (k est compris entre 1 et n)

($\star\star\star$) Exercice 9 (Oral ESCP)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 - x \leqslant e^{-x}$.
2. On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!). Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment ...
   (a) Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \dots, E_\ell$ une famille de ℓ événements indépendants. Montrer à l'aide de 1. :
   $$P\Big(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant \ell} \overline{E_i}\Big) \leqslant e^{-\sum\limits_{i=1}^{\ell} P(E_i)}$$
   (b) On note A_k l'événement « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ». Que vaut la probabilité de A_k ?
   (c) Quelle est la probabilité que la boule 10 sorte au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage, où n est un entier positif fixé ?
   (d) Quelle est la probabilité que la boule numérotée 10 sorte une infinité de fois ?
   (e) Calculer la probabilité que le 10 sorte une infinité de fois de suite.
3. On suppose cette fois que la personne remplit l'urne de sorte qu'il y ait dans l'urne n^2 boules, numérotées de 1 à n^2, le $n^{\text{ème}}$ jour (elle met donc une boule numérotée 1 le premier jour, trois boules numérotées $2, 3, 4$ le deuxième jour, cinq boules le troisième, ...). Comme à la question précédente, elle tire alors une boule, note son numéro et la remet immédiatement dans l'urne.
   (a) Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \dots, E_\ell$ une famille de ℓ événements. Redémontrer le résultat de cours :
   $$P\Big(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant \ell} E_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{\ell} P(E_i)$$
   (b) Quelle est la probabilité que le nombre 10 sorte une infinité de fois ?

($\star$) **Exercice 10** Une administration, dont on suppose l'effectif constant, répartit ses employés, d'une année sur l'autre, entre trois secteurs A, B et C, en respectant les proportions suivantes :

— 75% des employés du secteur A y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur C

— 75% des employés du secteur B y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur A

— 25% des employés du secteur C y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur A et 50% dans le secteur B.

On considère un employé qui travaille dans le secteur A la première année. On désigne par A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement « l'employé travaille dans le secteur A (resp. B, C) la $n^{\text{ième}}$ année ». On pose

$$a_n = P(A_n) \quad b_n = P(B_n) \quad c_n = P(C_n)$$

On introduit $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $U_{n+1} = MU_n$. En déduire l'expression de U_n en fonction de U_1.
2. Diagonaliser M et en déduire les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

($\star\star$) **Exercice 11** Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et commenter.

($\star\star$) **Exercice 12** Soit (A_n) une suite d'événements 2 à 2 incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

($\star\star$) **Exercice 13** Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de même couleur. On répète cette opération indéfiniment.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?
2. Justifier qu'il est presque sûr que la boule blanche de l'urne initiale sera tirée.

($\star\star\star$) **Exercice 14** On raisonne par l'absurde en supposant que l'intervalle $I = [0,1]$ est dénombrable. Il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que $I = \{u_n,\, n \in \mathbb{N}^*\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \left[u_n - \frac{1}{2^{n+1}}, u_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le segment $[0,1]$ n'est pas inclus dans la réunion $I_1 \cup \cdots \cup I_n$. On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0,1]$ choisis tels que x_n n'appartienne pas à $I_1 \cup \cdots \cup I_n$.
2. Aboutir à une contradiction.

($\star\star\star$) **Exercice 15** Soit s un réel strictement supérieur à 1.

1. Pour quelle valeur de λ réel, existe-t-il une probabilité P sur l'espace $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que :

$$P(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ ?}$$

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$ et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
   (a) Montrer que la famille des événements A_p pour p décrivant $\mathcal{P}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.
   (b) En étudiant $P(\{1\})$, établir
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Variables aléatoires et couples

($\star\star$) Exercice 16 Une urne contient a boules blanches, b boules noires et c boules rouges.
Un joueur tire une boule au hasard dans l'urne : si elle est blanche, il a gagné la partie ; si elle est noire, il a perdu la partie ; enfin, si elle est rouge, il l'enlève de l'urne et il fait un nouveau tirage. La même règle s'applique aux tirages suivants. Le jeu dure jusqu'à ce que le joueur ait gagné ou perdu la partie.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie se termine.
Déterminer la loi de probabilité de X.

($\star\star$) Exercice 17 On considère une urne comportant m boules numérotées de 1 à m. On procède à partir de cette urne à des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant :

— au premier tirage, on tire une boule au hasard de l'urne

— si à un tirage quelconque, on a obtenu la boule numéro k, on la replace dans l'urne, et toutes les boules portant un numéro strictement inférieur à k sont remplacées par un nombre égal de boules portant le numéro k ; on peut alors procéder au tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du n^{e} tirage.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. (a) Pour $k \in [\![1, m]\!]$, à l'aide du système complet d'événements $([X_1 = i])_{i \in X_1(\Omega)}$ et de la formule des probabilités totales, montrer que $P(X_2 = k) = \dfrac{2k-1}{m^2}$.
   (b) Toujours à l'aide de la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in X_n(\Omega)}$, montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $P(X_{n+1} = m) = \dfrac{m-1}{m} P(X_n = m) + \dfrac{1}{m}$.
   (c) En déduire $P(X_n = m)$ en fonction de n et m.
3. Montrer que les événements $[X_n = m]$ et $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [X_k = m]$ sont égaux.
   Retrouver la valeur de $P(X_n = m)$.

($\star\star\star$) Exercice 18 Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Un rat se trouve dans une boîte. Sur les cloisons de cette boîte sont dessinées $n-1$ fausses portes et cette boîte comporte également une vraie porte lui permettant de sortir de la boîte (on suppose $n \geqslant 2$).
Lorsque le rat s'aperçoit qu'il a choisi une fausse porte, il revient au centre de la boîte pour un nouvel essai.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'essais faits par l'animal pour trouver la porte qui lui permet de sortir.

1. On suppose que le rat ne possède pas de mémoire. Déterminer la loi de X.
2. Dans cette question, le rat ne possède toujours pas de mémoire, et à chaque erreur, on dessine une nouvelle fausse porte. Au départ, la cage possède une fausse porte et la vraie porte.
   Déterminer, dans ce cas, la loi de X.

3. On suppose, dans cette question, le rat sans mémoire pendant les ℓ premiers essais (avec $\ell \in \mathbb{N}^*$), puis possédant une mémoire immédiate ensuite : à partir du $(\ell+1)$-ième essai, et tant qu'il n'est pas sorti, il évite alors la dernière porte essayée pour l'essai suivant.
   On pose $X' = Y \times \mathbb{1}_{[Y \leqslant \ell]} + (\ell + Z) \times \mathbb{1}_{[Y > \ell]}$, où Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes, telles que Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$ et Z une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n-1}$.
   (a) Déterminer la loi de X' et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X' = k) = 1$.
   (b) Réaliser que X suit la même loi que X'. Proposer un algorithme de simulation de la variable aléatoire X.

(✍) Exercice 19 On considère les coefficients réels $p_{i,j} = a \times i \times j$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

1. Donner la valeur de a pour laquelle ils forment la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) avec $X(\Omega) = [\![1, n]\!] = Y(\Omega)$.
2. Donner les lois de X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(⋆⋆) Exercice 20 Soit n un entier naturel non nul, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Pour tout i entier naturel compris entre 0 et n et j entier naturel compris entre 0 et $2n$, on pose :

$$p_{i,j} = a \binom{n}{i} \binom{2n}{j} \left(\frac{p}{q}\right)^{i+j}$$

1. Déterminer a pour que les $p_{i,j}$ forment une loi d'un couple de variables aléatoires discrètes.
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![0, n]\!] \times [\![0, 2n]\!]$ admettant pour loi conjointe les $p_{i,j}$.
   (a) Donner les lois marginales du couple (X, Y) ; reconnaître ces lois.
   (b) X et Y sont-elles indépendantes ?

(⋆) Exercice 21 Une pièce amène Pile avec probabilité $\frac{1}{4}$. On la lance jusqu'à obtenir la séquence PF. Soit X le nombre de lancers nécessaires et R le rang d'apparition du premier Pile.

1. Donner la loi du couple (R, X).
2. En déduire la loi de X.

(⋆) Exercice 22 Dans une station de ski, on peut se rendre aux départs respectifs des pistes « les marmottes » et « les chamois » par deux remontées mécaniques qui partent du même endroit de la station. Le nombre de skieurs qui se présentent à cet endroit pendant une heure est un variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On admet que chaque skieur choisit indépendamment « les marmottes » ou « les chamois » avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de skieurs qui choisissent la piste « les marmottes » pendant 1 heure.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X).
2. Déterminer la loi marginale de X. De quelle loi s'agit-il ?
3. Donner le nombre moyen de skieurs se présentant pendant 1 heure au départ de la piste« les marmottes ».

(⋆⋆) Exercice 23 Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas (ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est $0,7$). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Un jour donné, appelé le jour 1, on commence à noter les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA$... signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A ; les jours 3,4,5, il a choisi le serveur B ; le jour 6, le serveur A. On dit ici que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (ce qui est également le cas de la série $BBAAAB$...).
   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.
   Ainsi, pour $k \geqslant 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

   (a) Justifier soigneusement la formule : $\forall k \geqslant 1 \qquad P(L_1 = k) = 0,7(0,3)^k + 0,3(0,7)^k$.
   (b) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$.
   (c) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2).
   (d) En déduire la loi de L_2.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note N_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

   (a) Déterminer la loi de N_n, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de T_1, son espérance et sa variance.
   (c) Montrer que $\forall k \geqslant 2 \qquad P(T_2 = k) = (k-1)(0,7)^2(0,3)^{k-2}$.

($\star\star$) Exercice 24 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi géométrique de paramètre p. On pose $q = 1 - p$. Soient $V = \inf(X, Y)$ et $W = X - Y$.

1. Donner la loi du couple (V, W).
2. En déduire la loi de V et celle de W. Montrer que V et W sont indépendantes.

($\star\star$) Exercice 25 Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X, Y et Z suivent la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. (a) Montrer que $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $P([X + Y = k]) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   (b) Montrer que $\forall k \in [\![n+2, 2n]\!]$, $P([X + Y = k]) = \dfrac{2n - k + 1}{n^2}$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que $P([X + Y = Z]) = \dfrac{n-1}{2n^2}$.

3. (a) Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
   (b) Pourquoi T est-elle indépendante de X et Y ?
   (c) En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité $P([X + Y + Z = n + 1])$.

($\star$) Exercice 26 Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson suit aussi une loi de Poisson.

($\star\star\star$) Exercice 27 Soient $p \in]0, 1[$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi binomiale, respectivement $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

($\star\star$) **Exercice 28** Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q appartenant à $]0,1[$. Calculer la probabilité que la matrice suivante soit diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & -X \end{pmatrix}$$

($\star\star$) **Exercice 29** Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X \leqslant n)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} P(X \leqslant x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X \leqslant -n)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} P(X \leqslant x)$.

($\star\star$) **Exercice 30**

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Donner la loi de $X+Y$.
2. Montrer que pour tout $k \geqslant n$, $\sum\limits_{j=n}^{k} \binom{j-1}{n-1} = \binom{k}{n}$.
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que pour tout $k \geqslant n$, on a

$$P(S_n = k) = p^n (1-p)^{k-n} \binom{k-1}{n-1}$$

($\star\star$) **Exercice 31** On lance une infinité de fois une pièce donnant Pile avec probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{1}{3}$. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs. On pose $p_n = P(X = n)$.

1. Calculer p_2 et p_3.
2. Justifier que $p_{n+2} = \frac{1}{3} p_{n+1} + \frac{2}{9} p_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
3. Quelle valeur de p_1 doit-on choisir pour que la relation de récurrence précédente reste valide lorsque $n = 1$? On fait ce choix de p_1 pour la fin de l'exercice.
4. Calculer alors p_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Banque épreuve orale CCINP

95, 97 question 1, 98, 101, 102, 103, 105, 106, 107, 108, 109, 111.
Dénombrement : 112.
