Feuille d'exercices n° 13 **MP**
Espaces préhilbertiens réels **2023-2024**
Révisions

Produits scalaires, normes, orthogonalité

(⋆⋆) Exercice 1
Soient $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ des réels distincts deux à deux et $E = \mathbf{R}_n[X]$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant : $\forall (P,Q) \in E^2$, $\varphi(P,Q) = \sum_{k=1}^{n+1} P(a_k)Q(a_k)$.
2. Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on pose :
$$L_i(X) = \prod_{k \in [\![1,n+1]\!],\ k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$$
   (a) Pour $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, calculer $L_i(a_j)$.
   (b) En déduire que $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est une base orthonormée de E.

(✍) Exercice 2 $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire canonique. Pour chacun des sous-espaces suivants, donner une base de $F^\perp$:

1. $F = \text{Vect} < (1,2,0,1), (0,1,2,3) >$
2. $F = \text{Vect} < (3,2,0,4), (1,0,0,-2), (1,-1,-1,1) >$
3. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y - z = 0\}$
4. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \quad \text{et} \quad x + t = 0\}$

(⋆) Exercice 3 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le produit scalaire donné par :
$$\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$
(on admet qu'il s'agit bien d'un produit scalaire) et les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect} < 1+X, 1-X^2 >$ et $G = \text{Vect} < X - X^2 >$.
Montrer que $G = F^\perp$ et que $F = G^\perp$.

(⋆⋆) Exercice 4 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
2. On suppose que $F \cap G^\perp = \{0\}$ et que $\dim F = \dim G$. Montrer que $F^\perp \cap G = \{0\}$.

(⋆⋆) Exercice 5 Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme $\|.\|$ associée, et x et y vecteurs de E. Montrer l'équivalence :
$$(x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux}) \Longleftrightarrow (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|)$$

(⋆) Exercice 6 Soit E un espace euclidien et a un vecteur de norme 1. On considère :
$$f_\lambda : x \mapsto x + \lambda \langle a, x \rangle a$$
Montrer que f_λ est bijective si et seulement si $\lambda \neq -1$.

(⋆) Exercice 7 Soit E un espace vectoriel euclidien, et E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels de E. Montrer :
$$E = E_1 \oplus E_2 \quad \Rightarrow \quad E = E_1^\perp \oplus E_2^\perp$$

Projetés orthogonaux

(✍) **Exercice 8** $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. p_F désigne la projection orthogonale sur F.

1. Calculer $p_F(1,1,1)$ lorsque $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+3y-z=0\}$.
2. Calculer $p_F(x,y,z)$ lorsque $F = \text{Vect} < u >$, où $u = (-1,3,4)$.

($\star$) **Exercice 9** $F = \text{Vect} < (1,-2,1) >$ et $G = \text{Vect} < (1,0,-1),(1,1,1) >$.

1. Montrer que $F = G^\perp$.
   On note p la projection orthogonale sur F et q la projection orthogonale sur G.
2. Exprimer, pour $v \in \mathbb{R}^3$, $p(v)$ et $q(v)$.

($\star\star$) **Exercice 10** On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. On note H le sous-espace vectoriel engendré par u, v et w, où

$$u = (1,1,0,1) \qquad v = (1,1,1,0) \qquad w = (1,1,-2,1)$$

1. Déterminer la dimension de H et une base de $H^\perp$.
2. On note p la projection orthogonale sur H (projection sur H parallèlement à $H^\perp$). Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Inégalités

($\star$) **Exercice 11** Soient x et y des vecteurs d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice suivante est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & \langle x,y\rangle \\ \langle x,y\rangle & \|y\|^2 \end{pmatrix}$$

($\star$) **Exercice 12** À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

($\star\star$) **Exercice 13** Soient x, y, z réels vérifiant $2x^2+y^2+5z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{17}{10}$.

($\star$) **Exercice 14** Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

($\star$) **Exercice 15**

1. (a) Montrer que pour tout $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

   (b) Application : montrer que si X est une variable aléatoire discrète finie à valeurs strictement positives, alors $E\left(\dfrac{1}{X}\right) \geqslant \dfrac{1}{E(X)}$.

2. (a) Montrer que pour f et g fonctions continues sur $[0,1]$, on a :

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 [f(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 [g(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)$$

(b) Application : soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0,1]$. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$$

($\star$) Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.
2. Déterminer les vecteurs x de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ pour lesquels $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = n^2$.

($\star\star$) Exercice 17 Soit E l'ensemble des suites réelles telles que $\sum x_n^2$ converge.

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Démontrer qu'en posant, pour toute suite (x_n) et (y_n) de E, $\langle (x_n),(y_n)\rangle = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$, on définit un produit scalaire sur E.
   E est-il un espace vectoriel euclidien (on ne demande pas de démonstration) ?
3. Montrer que pour (x_n) et (y_n) éléments de E, on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2\right)$$

(✍) Exercice 18 Pour $x_1, x_2, \dots, x_n$ réels, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer l'inégalité :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

($\star\star$) Exercice 19 Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$ et d'une norme $\| \, . \, \|$.

1. Montrer que pour tout couple (x,y) de vecteurs de E, on a : $\langle x|y\rangle \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.
2. Montrer, en développant la norme à l'aide du produit scalaire, que pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n$ vecteurs de E, on a :

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

(✍) Exercice 20 Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser la base (v_1, v_2, v_3) où :

$$v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (1,0,0)$$

(✍) Exercice 21 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour P et Q appartenant à E, on pose

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{\pi} (\sin t)\, P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, donner une base orthonormée de $F = \text{Vect} < 1, X >$.

Divers

($\star\star$) Exercice 22 Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. On considère l'application u définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad u(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Montrer que u est un endomorphisme de E. Que représente $u(f)$?
2. Déterminer un endomorphisme v de E qui vérifie :

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \langle u(f), g\rangle = \langle f, v(g)\rangle$$

   On pourra introduire une primitive bien choisie de la fonction g. Vérifier que v est unique.
3. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $u \circ v$ sont strictement positives.

($\star\star$) Exercice 23 $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer par récurrence qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes deux à deux orthogonaux, avec P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
2. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $P_{n+1} - XP_n$ est dans $(\mathbb{R}_{n-2}[X])^{\perp}$.
3. En déduire qu'il existe $(\lambda_n, \mu_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1} + \mu_n P_n$.

($\star\star$) Exercice 24 Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

   où f est une fonction continue strictement positive sur $[a,b]$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Que peut-on dire de $\deg P_k$, pour tout k de $[\![0, n]\!]$?
3. En considérant le produit scalaire $\langle XP_p, P_q\rangle$, montrer que XP_p appartient à $\text{Vect} < P_{p-1}, P_p, P_{p+1} >$ pour tout entier naturel p non nul.
4. En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$a_n P_n(X) + (b_n + X)P_{n+1}(X) + c_n P_{n+2}(X) = 0$$

   où les trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont des suites de réels.

($\star$) **Exercice 25** Soient E un espace vectoriel euclidien et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n vecteurs unitaires (c'est-à-dire de norme 1) telle que :

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 = \|x\|^2$$

1. Montrer que les vecteurs e_i sont orthogonaux deux à deux.
2. On note F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
   (a) Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.
   (b) Qu'en déduit-on pour F ?
3. En déduire que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

($\star\star$) **Exercice 26** Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux, et E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique $\langle ., . \rangle$ et de la norme associée $\|.\|$.
On note B_c la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour ce produit scalaire.
On note f l'endomorphisme de E tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.
Soient n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$; on note $m = \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et on suppose dans cet exercice que $m > n$.
On note d l'endomorphisme de E tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d(e_i) = a_i e_i$.
Enfin, on note g l'endomorphisme $f + d$ de E.

1. (a) Montrer que $w = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ est un vecteur propre de f. À quelle valeur propre est-il associé ?
   (b) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et en préciser une base orthonormée.
   (c) Prouver que $\ker f$ est le sous-espace vectoriel de E de base $B' = (e_2 - e_1, e_3 - e_1, \ldots, e_n - e_1)$.
   (d) Justifier que $\operatorname{Im} f = (\ker f)^{\perp}$.
   (e) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f, et que pour tout vecteur u de E, on a $\|f(u)\| \leqslant n\|u\|$.

2. (a) Justifier que d est un automorphisme de E.
   (b) Montrer que pour tout vecteur u de E, $\|d(u)\| \geqslant m\|u\|$ et que pour tout vecteur v de E, $\|d^{-1}(v)\| \leqslant \dfrac{1}{m}\|v\|$.
   (c) Prouver que pour tout vecteur u non nul de E, on a $\|f(u)\| < \|d(u)\|$.
   (d) En déduire, en étudiant $\ker g$, que g est un automorphisme de E.

3. Soit v un vecteur fixé de E. Par 2.d., il existe un unique vecteur u de E tel que $g(u) = v$.
   On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par

$$\begin{cases} u_0 & = v \\ u_{k+1} & = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u_k) \text{ pour } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (a) Vérifier que $u = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u)$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel k, $u_{k+1} - u = -(d^{-1} \circ f)(u_k - u)$.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel k, $\|u_{k+1} - u\| \leqslant \dfrac{n}{m}\|u_k - u\|$.
   Montrer finalement que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|u_k - u\| = 0$.

($\star$) **Exercice 27** On considère un espace euclidien de dimension n, et des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de norme 1 et vérifiant : pour $i \neq j$, $\|v_i - v_j\| = 1$.

1. Calculer $\langle v_i, v_j \rangle$.
2. Montrer alors que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E.

($\star$) **Exercice 28** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

1. Démontrer que si u et v sont deux vecteurs de norme 1 de E, alors on a $\langle u+v, u-v \rangle = 0$.
2. Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme tel que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.
   (a) Montrer que si u et v dans E sont de norme 1, alors $\|f(u)\| = \|f(v)\|$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel $k > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

($\star$) **Exercice 29** E est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour g et f dans E, on pose :

$$\langle f, g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout $f \in E$,

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t \right)^2 \leqslant 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \right)$$

($\star$) **Exercice 30**
$E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$$

2. On pose

$$\begin{aligned} F &= \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\} \\ G &= \{g \in E,\ g'' = g\} \end{aligned}$$

   Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux.

($\star\star$) **Exercice 31** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$.

1. Établir que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\mathrm{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$.
2. Démontrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. On note $(m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ les coefficients d'une matrice M.

   Montrer que pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\min\limits_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n (a_{i,j} - m_{i,j})^2$ existe et vaut

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

($\star\star$) **Exercice 32** Calculer $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - a - bx)^2\,\mathrm{d}x$.

Banque épreuve orale

Analyse : 39.
Algèbre : 76, 77, 79, 80, 81, 82, 92.
