
(♣) **Exercice 1** Représenter les parties suivantes de \mathbb{R}^2 et préciser si elles sont ouvertes, fermées, bornées.

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 2\}$
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0\}$

(★★) **Exercice 2** Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme infinie. Notons $a = (a_n)$ la suite constante égale à 1 et F le sous-espace vectoriel des suites convergent vers 0. Montrer que la distance de a à F est égale à 1.

(★) **Exercice 3** Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel de E .
2. On suppose E de dimension finie. Soit H un hyperplan de E . Montrer à l'aide de la question précédente que H est soit fermé, soit dense dans E .
Trancher entre ces deux situations.

(★★) **Exercice 4** Dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme donnée par $\|P\| = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$, on considère $D : P \mapsto P'$. Montrer que l'application D n'est pas continue sur E .

(★★) **Exercice 5** Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel non vide de E .

1. Montrer que si F est ouvert, alors $F = E$.
2. Montrer que si F n'est pas d'intérieur vide, alors $F = E$.

(★★) **Exercice 6** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions continues s'annulant en 0 et en 1.

1. On munit E de la norme : $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Montrer que $\overline{F} = F$. Comment formuler autrement cette égalité ?
2. On munit E de la norme : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Montrer que $\overline{F} = E$. Comment formuler autrement cette égalité ?

(★★★) **Exercice 7** Déterminer la frontière de \mathbb{Q} .

(★) **Exercice 8** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ est k -lipschitzienne pour une valeur de k que l'on précisera. Qu'en déduit-on ?

(★) **Exercice 9** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$ est bijective de E dans $\mathcal{B}(0, 1)$. Montrer que f et f^{-1} sont continues.

(★) **Exercice 10** Montrer de deux façons que $T : M \mapsto M^\top$ est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(**) **Exercice 11** Montrer la continuité sur $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ de l'application qui à une matrice associe son inverse. On utilisera la formule de l'inverse par la comatrice.

(*) **Exercice 12** Soit $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ défini par $T(P) = P'$. Étudier la continuité de T lorsqu'on munit $\mathbb{R}[X]$ des normes :

$$1. N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \qquad 2. N_2(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

(*) **Exercice 13** On munit $E = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ de la norme infinie. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} . Montrer que la forme linéaire définie sur E par

$$u(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)}{2^n}$$

est continue et déterminer sa norme subordonnée.

(*) **Exercice 14** Soit $E = \mathbb{K}[X]$ muni de la norme donnée par $\|P\| = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$. On considère $u : P \mapsto P(\frac{X}{2})$. Montrer que u est continue sur E et calculer $\|u\|$.

(*) **Exercice 15** Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ muni de la norme uniforme. On considère $\varphi : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t) dt$. Montrer que φ est continue sur E et calculer $\|\varphi\|$. On pourra considérer les fonctions $f_n : t \mapsto 1 - t^n$.

(**) **Exercice 16** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de la norme infinie. Montrer que $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.
 2. On suppose que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de la norme 1. Montrer que $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.
 3. (*uniquement pour les 5/2 ou en fin d'année*) On suppose que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de la norme 2. Montrer que $\|A\| = \sqrt{\max(\text{Sp}(A^\top A))}$.
-

(*) **Exercice 17** Montrer qu'une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est continue si, et seulement si, sa restriction à la sphère unité est bornée.

(**) **Exercice 18**

1. Montrer que $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
 3. En déduire que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
-

(**) **Exercice 19** On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables.

1. Montrer que $\varphi : M \mapsto (\text{Tr}(M))^2 - 4 \det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est trigonalisable si et seulement si $\varphi(M) \geq 0$.
3. En déduire que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$.

(*** **Exercice 20** Soit E un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire sur E .

1. Montrer que si φ est continue, alors $\ker \varphi$ est fermé.
 2. Réciproquement, on suppose que $\ker \varphi$ est fermé. On raisonne par l'absurde en supposant que φ n'est pas continue. En utilisant la négation du critère de continuité d'une application linéaire, aboutir à une contradiction. Conclure.
-

(*) **Exercice 21** Soit f une application définie sur une partie A non vide d'un espace vectoriel normé E .

1. Montrer que f est uniformément continue si, et seulement si, pour toutes suites (a_n) et (b_n) d'éléments de A telles que $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$, on a $\|f(a_n) - f(b_n)\| \rightarrow 0$.
 2. En déduire que la fonction logarithme n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}^+ .
-

(** **Exercice 22** Soit E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow E$ une fonction continue admettant une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

(*) **Exercice 23** Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que la sphère unité, $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$, est une partie compacte.

(*) **Exercice 24** Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé et $x \in E$. On rappelle que $d(x, K) = \inf_{y \in K} \|y - x\|$. Montrer qu'il existe $y_0 \in K$ tel que $d(x, K) = \|y_0 - x\|$.

(** **Exercice 25** Montrer que $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\}$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(*** **Exercice 26** Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \rightarrow 0$. Montrer que la suite u converge, en utilisant un argument de compacité.

(*) **Exercice 27** Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

(*) **Exercice 28** Soient K et L deux compacts d'un espace vectoriel normé.

1. Que nous dit le cours au sujet de $K \times L$?
 2. Montrer que si K et L sont disjoints, alors $\inf_{(x,y) \in K \times L} \|x - y\| > 0$.
-

(*) **Exercice 29** Parmi les ensembles suivants, lesquels sont compacts ?

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y^2 = 1\}$
 2. $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^4 = 1\}$
 3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x(1 - 2x)\}$
-

(*** **Exercice 30** Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E . Soit $f : K \rightarrow K$ une application vérifiant :

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad (*)$$

1. En considérant $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$, montrer que f admet un unique point fixe, noté α .
2. Soit $x \in K$. On considère la suite donnée par $u_0 = x$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) admet une unique valeur d'adhérence, égale à α . Qu'en déduit-on ?

(★★) **Exercice 31** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la suite (A^k) soit bornée. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$B_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k.$$

1. Montrer que la suite (B_p) possède au moins une valeur d'adhérence B .
 2. Montrer que $B(I_n - A) = 0_n$.
 3. Montrer que B est une matrice de projection, et que c'est la projection sur $\ker(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$.
 4. Conclure que la suite (B_p) converge vers B .
-

(★★) **Exercice 32** Montrer que les fonctions suivantes S sont continues sur D .

1. $S(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x^2)(n+y^2)}$ et $D = \mathbb{R}^2$.
2. $S(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(ny)}{1+n^2x}$ et $D = \{(x, y), x > 0\}$.

(★★) **Exercice 33** Étudier la continuité en $(0, 0)$ des fonctions f suivantes, données par $f(0, 0) = 0$ et

1. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
3. $f(x, y) = \frac{x^3y^3}{x^4+y^8}$
4. $f(x, y) = \frac{x^2y^3}{x^4+y^8}$

(★★) **Exercice 34** Les fonctions suivantes ont-elles une limite à l'origine ?

1. $f(x, y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2. $g(x, y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
3. $j(x, y) = \frac{x^2y+yz^2}{x^2+2y^2+3z^2}$
4. $h(x, y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x} \sin(x), \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$
5. $k(x, y, z) = \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

(★) **Exercice 35** On considère $g : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{e^{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} \end{array} \right)$.

1. Montrer que pour tout réel a , il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B_f(0, R), \quad g(x, y) > a$$

2. Montrer que g possède un minimum sur \mathbb{R}^2 .
-

(★) **Exercice 36** Soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique (cercle de centre O et rayon 1) dans \mathbb{R}^2 . Montrer que \mathcal{C} est connexe par arcs :

1. par un schéma,
 2. par des calculs.
-

(★★) **Exercice 37** Nous allons montrer que les sphères d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E de dimension supérieure ou égale à 2 sont connexes par arcs.

1. Soit S la sphère unité de E et soient a et b dans S , avec $a \neq b$.
 - (a) Dans le cas où $a \neq -b$, en considérant $\gamma(t) = \frac{(1-t)a+tb}{\|(1-t)a+tb\|}$, montrer qu'il existe un chemin continu reliant a à b dans S .
 - (b) Traiter le cas où $a = -b$ en utilisant le résultat de la question précédente.
On en déduit que S est connexe par arcs.
 2. En déduire que toutes les sphères de E sont connexes par arcs.
-

Banque épreuve orale

Analyse : 13, 17, 34, 35, 36, 37, 38, 40, (41), 44, 45, 54, 58 bis.
