Feuille d'exercices n° 11 **MP**
Suites et séries de fonctions **2024-2025**
à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Suites de fonctions

($\star\star$) **Exercice 1** Étudier la convergence simple et uniforme sur l'intervalle donné de la suite (f_n) dans les cas suivants.

1. $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f_n : x \mapsto (x + \dfrac{e^{-x}}{n})^2$ et $I = \mathbb{R}^+$
3. $f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ nx^n \ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$ et $I = [0,1]$
4. $f_n : x \mapsto e^{-nx}\sin(2nx)$ et $I = \mathbb{R}^+$ puis $I = [a, +\infty[$ $(a > 0)$
5. $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ et $I = \mathbb{R}$ puis $I = [a, +\infty[$ $(a > 0)$

($\star$) **Exercice 2** Soit $f_n : x \mapsto n(\cos x)^n \sin x$ et $I = \mathbb{R}$. Étudier la convergence simple sur I. Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Qu'en déduit-on ?

($\star$) **Exercice 3** On considère la suite de fonctions $u_n : t \mapsto nt(1-t)^n$ sur $[0,1]$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?
2. Soit $a \in]0,1[$. Justifier que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur le segment $[a,1]$. Y a-t-il convergence uniforme sur $]0,1]$?

($\star$) **Exercice 4** Étudier la convergence simple, la convergence uniforme, la convergence sur tout segment de la suite de fonctions (u_n) donnée par

$$u_n(t) = n\sin(t)e^{-nt} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+$$

($\star$) **Exercice 5** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

($\star$) **Exercice 6** On pose $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+n^2x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Sur quelle partie D de $\mathbb{R}$, la suite de fonctions (f_n) converge-t-elle simplement ?
2. Est-ce que (f_n) converge uniformément sur D ?

($\star$) **Exercice 7**

1. Calculer $\lim\limits_{x\to1^-} \lim\limits_{n\to+\infty} x^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to1^-} x^n$.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 n^2te^{-nt}\,\mathrm{d}t$ et $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} n^2te^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

($\star$) **Exercice 8** Soit (f_n) une suite de fonctions bornées, avec $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f. Montrer que f est bornée. Montrer que le résultat ne persiste pas si on suppose uniquement la convergence simple.

($\star$) **Exercice 9** Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0,1]$, telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

($\star$) **Exercice 10** Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un même intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur I vers respectivement f et g. On suppose de plus que f et g sont bornées. Démontrer que la suite de fonctions (f_ng_n) converge uniformément vers fg.

($\star\star\star$) **Exercice 11** Démontrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est elle-même une fonction uniformément continue.

($\star\star\star$) **Exercice 12** Soit f la fonction définie de l'intervalle $I=[0,1]$ dans lui-même par la relation $f(x)=2x(1-x)$, et f_n la fonction itérée d'ordre n de f :

$$f^n=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ facteurs}}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a,\frac{1}{2}]$ où $a\in]0,\frac{1}{2}]$. Sans nouveau calcul, expliquer pourquoi il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a,b]$ avec $0<a<b<1$.

Séries de fonctions

($\star$) **Exercice 13** Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme, de la série $\sum u_n$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u_n(t)=\dfrac{\sin(nt)}{n^2+1}$.

($\star$) **Exercice 14** Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme, de la série $\sum u_n$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $u_n(t)=\dfrac{(-1)^n}{n+t}$.

($\star\star$) **Exercice 15** Soit $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Étudier ses variations et donner la limite de S en $+\infty$.
3. Étudier la continuité de S sur son intervalle de définition.
4. Donner un équivalent simple de S en 0^+ (on utilisera une comparaison série-intégrale).

($\star$) **Exercice 16** Calculer $\displaystyle\int_0^1\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x$.

($\star\star$) **Exercice 17** Pour $x\geqslant 0$, on pose $u_n(x)=\dfrac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,A]$ avec $A>0$.
3. Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{n}{n^2+k^2} \geqslant \dfrac{1}{5}$. En déduire que la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

($\star\star$) Exercice 18 Soit $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ pour $x\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple, la convergence normale et la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Mêmes questions sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$.

($\star\star\star$) Exercice 19 Pour α réel et $n\in\mathbb{N}^*$, on considère les fonctions u_n définies sur $[0,1]$ par :

$$u_n(x) = n^\alpha x^n (1-x)$$

1. Pour quels réels α la **suite** (u_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
2. Pour quels réels α la **série** $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

($\star\star$) Exercice 20 Pour $x\in[0,+\infty[$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\ln(1+\dfrac{x}{n})$.

1. Montrer que la fonction S est bien définie sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Étudier ses variations.

($\star\star$) Exercice 21 Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \arctan(n+x) - \arctan(n)$.

1. À l'aide, par exemple, de l'inégalité des accroissements finis, montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
   On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. (☕) Déterminer la limite de S en $+\infty$. On montrera que pour tout réel $x>0$, $\arctan(x) + \arctan(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$.
4. La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur les intervalles $[A,+\infty[$ avec $A>0$?

($\star\star$) Exercice 22 On donne $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Pour t réel et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = \dfrac{\arctan(nt)}{n^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S la fonction somme.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$, croissante, et préciser sa parité.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
4. ($\star\star\star$) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $t_N>0$ tel que pour tout $t\in]-t_N,t_N[\setminus\{0\}$,
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$
5. En déduire que la courbe représentative de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
6. Tracer la courbe représentative de S.

($\star\star$) Exercice 23 $I=]-1,+\infty[$ et $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que S est définie et continue sur I. Étudier sa monotonie.
2. Calculer $S(x+1)-S(x)$. En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures.
3. Établir que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S(p) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

($\star\star$) Exercice 24 Pour $x \geqslant 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note S sa somme.
2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement ? uniformément sur $\mathbb{R}^+$?
3. Résoudre : $y' - y = -\dfrac{e^x}{e^x+1}$ sur $]0, \infty[$.
4. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 1$. En déduire l'expression de S à l'aide de fonctions usuelles.

($\star\star\star$) Exercice 25 Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n-1}}{1-x^{2n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et étudier ses variations.
3. Étudier les limites de S aux bornes de D.

($\star$) Exercice 26 Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x > 0$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.
2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de S.
3. Montrer que pour $x > 0$, $S(x+1) + S(x) = \dfrac{1}{x}$. En déduire un équivalent de $S(x)$ en 0.

(☕) Exercice 27 On pose $D(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Montrer que la fonction D est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
2. Vérifier que pour $x > 0$,

$$D(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2p-1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \right)$$

   À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer alors la limite de $D(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Approximation polynomiale

($\star\star$) Exercice 28 *Approximation polynomiale de la racine carrée.*

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $P_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n + \dfrac{1}{2}(X - P_n^2)$.

1. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien polynomiale et préciser le degré de P_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \geqslant 0$,

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x}) \left(1 - \frac{1}{2}(P_n(x) + \sqrt{x}) \right)$$

3. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$.

4. En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$, en croissant, vers une fonction f à préciser.
5. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

6. Prouver alors que la convergence de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme.

($\star$) Exercice 29 Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit les deux normes N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sup_{t\in[-2,-1]} |P(t)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[1,2]} |P(t)|$$

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ ainsi :
pour tout $x \in [-2,-1]$, $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = 1$ et pour tout $x \in [1,2]$, $f(x) = x^3$.

1. Représenter graphiquement la fonction f et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.
2. Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.

($\star\star\star$) Exercice 30 Soient $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme B_n défini par :

$$\forall x \in [0,1], \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Calculer B_n pour $f : x \mapsto 1$, $f : x \mapsto x$, et $f : x \mapsto x^2$.
2. Déduire des calculs précédents que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leqslant \frac{n}{4}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ vérifiant $|x-y| \leqslant \alpha$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $|B_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.
   (c) Prouver alors que la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.

Banque épreuve orale CCINP

Analyse : 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 48, 53.
