

Suites de fonctions

(★★) **Exercice 1** Étudier la convergence simple et uniforme sur l'intervalle donné de la suite (f_n) dans les cas suivants.

1. $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f_n : x \mapsto (x + \frac{e^{-x}}{n})^2$ et $I = \mathbb{R}^+$
3. $f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ nx^n \ln(x) & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$ et $I = [0, 1]$
4. $f_n : x \mapsto e^{-nx} \sin(2nx)$ et $I = \mathbb{R}^+$ puis $I = [a, +\infty[$ ($a > 0$)
5. $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $I = \mathbb{R}$ puis $I = [a, +\infty[$ ($a > 0$)

(★) **Exercice 2** Soit $f_n : x \mapsto n(\cos x)^n \sin x$ et $I = \mathbb{R}$. Étudier la convergence simple sur I . Comparer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

Qu'en déduit-on ?

(★) **Exercice 3** On considère la suite de fonctions $u_n : t \mapsto nt(1-t)^n$ sur $[0, 1]$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$?
2. Soit $a \in]0, 1[$. Justifier que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur le segment $[a, 1]$. Y a-t-il convergence uniforme sur $]0, 1]$?

(★) **Exercice 4** Étudier la convergence simple, la convergence uniforme, la convergence sur tout segment de la suite de fonctions (u_n) donnée par

$$u_n(t) = n \sin(t) e^{-nt} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+$$

(★) **Exercice 5** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}^+ vers une fonction f à déterminer.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

(★) **Exercice 6** On pose $f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{1+n^2x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Sur quelle partie D de \mathbb{R} , la suite de fonctions (f_n) converge-t-elle simplement ?
2. Est-ce que (f_n) converge uniformément sur D ?

(★) **Exercice 7**

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n^2 t e^{-nt} dt$ et $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 t e^{-nt} dt$.

(*) **Exercice 8** Soit (f_n) une suite de fonctions bornées, avec $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f . Montrer que f est bornée. Montrer que le résultat ne persiste pas si on suppose uniquement la convergence simple.

(*) **Exercice 9** Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$, telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

(*) **Exercice 10** Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un même intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur I vers respectivement f et g . On suppose de plus que f et g sont bornées. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers $f g$.

(***) **Exercice 11** Démontrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues définies sur un intervalle I de \mathbb{R} est elle-même une fonction uniformément continue.

(***) **Exercice 12** Soit f la fonction définie de l'intervalle $I = [0, 1]$ dans lui-même par la relation $f(x) = 2x(1 - x)$, et f_n la fonction itérée d'ordre n de f :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ facteurs}}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
 2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a, \frac{1}{2}]$ où $a \in]0, \frac{1}{2}[$. Sans nouveau calcul, expliquer pourquoi il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a, b]$ avec $0 < a < b < 1$.
-

Séries de fonctions

(*) **Exercice 13** Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme, de la série $\sum u_n$ de fonctions définies sur \mathbb{R} par $u_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n^2 + 1}$.

(*) **Exercice 14** Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme, de la série $\sum u_n$ de fonctions définies sur \mathbb{R}^+ par $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n + t}$.

(**) **Exercice 15** Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Donner le domaine de définition de S .
 2. Étudier ses variations et donner la limite de S en $+\infty$.
 3. Étudier la continuité de S sur son intervalle de définition.
 4. Donner un équivalent simple de S en 0^+ (on utilisera une comparaison série-intégrale).
-

(*) **Exercice 16** Calculer $\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) dx$.

(**) **Exercice 17** Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ .
 2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$ avec $A > 0$.
 3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$. En déduire que la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^+ .
-

(**) **Exercice 18** Soit $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple, la convergence normale et la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ .
 2. Mêmes questions sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
-

(***) **Exercice 19** Pour α réel et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions u_n définies sur $[0, 1]$ par :

$$u_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x)$$

1. Pour quels réels α la **suite** (u_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
 2. Pour quels réels α la **série** $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
-

(**) **Exercice 20** Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{x}{n})$.

1. Montrer que la fonction S est bien définie sur $[0, +\infty[$ et de classe \mathcal{C}^1 .
 2. Étudier ses variations.
-

(**) **Exercice 21** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \arctan(n+x) - \arctan(n)$.

1. À l'aide, par exemple, de l'inégalité des accroissements finis, montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
 2. Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+ .
 3. (☛) Déterminer la limite de S en $+\infty$. On montrera que pour tout réel $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
 4. La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur les intervalles $[A, +\infty[$ avec $A > 0$?
-

(**) **Exercice 22** On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Pour t réel et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . On note S la fonction somme.
2. Montrer que S est continue sur \mathbb{R} , croissante, et préciser sa parité.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
4. (***) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $t_N > 0$ tel que pour tout $t \in]-t_N, t_N[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n(t)}{t} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

5. En déduire que la courbe représentative de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
 6. Tracer la courbe représentative de S .
-

(**) **Exercice 23** $I =]-1, +\infty[$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

1. Montrer que S est définie et continue sur I . Étudier sa monotonie.
2. Calculer $S(x+1) - S(x)$. En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures.
3. Établir que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S(p) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

(**) **Exercice 24** Pour $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ . On note S sa somme.
2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement ? uniformément sur \mathbb{R}^+ ?
3. Résoudre : $y' - y = -\frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $]0, \infty[$.
4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 1$. En déduire l'expression de S à l'aide de fonctions usuelles.

(***) **Exercice 25** Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n-1}}{1-x^{2n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S .
2. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur D et étudier ses variations.
3. Étudier les limites de S aux bornes de D .

(*) **Exercice 26** Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Montrer que pour tout $x > 0$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.
2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de S .
3. Montrer que pour $x > 0$, $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$. En déduire un équivalent de $S(x)$ en 0.

(*) **Exercice 27** On pose $D(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Montrer que la fonction D est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
2. Vérifier que pour $x > 0$,

$$D(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2p-1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \right)$$

À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer alors la limite de $D(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Approximation polynomiale

(**) **Exercice 28** *Approximation polynomiale de la racine carrée.*

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes définie par $P_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$.

1. Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien polynomiale et préciser le degré de P_n .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \geq 0$,

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x}) \left(1 - \frac{1}{2}(P_n(x) + \sqrt{x}) \right)$$

3. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

4. En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$, en croissant, vers une fonction f à préciser.
5. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

6. Prouver alors que la convergence de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est uniforme.
-

(★) **Exercice 29** Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit les deux normes N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sup_{t \in [-2, -1]} |P(t)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [1, 2]} |P(t)|$$

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2, 2]$ ainsi :

pour tout $x \in [-2, -1]$, $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 1$ et pour tout $x \in [1, 2]$, $f(x) = x^3$.

1. Représenter graphiquement la fonction f et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2, 2]$.
 2. Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2 .
-

(★★★) **Exercice 30** Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme B_n défini par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Calculer B_n pour $f : x \mapsto 1$, $f : x \mapsto x$, et $f : x \mapsto x^2$.
2. Déduire des calculs précédents que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leq \frac{n}{4}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ vérifiant $|x - y| \leq \alpha$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, $|B_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.

(c) Prouver alors que la suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur le segment $[0, 1]$.

Banque épreuve orale

Analyse : 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 48, 53.
