

(★) **Exercice 1** (5/2 *uniquement*) Donner le domaine de définition de f , g et h ; représenter ces domaines et préciser, sans démonstration, si ce sont des ensembles ouverts, fermés, bornés :

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2 - x^2} \quad g(x, y) = \ln(1 - xy) \quad h(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

(★) **Exercice 2** (5/2 *uniquement*) Donner et représenter les domaines de définition de f et g données par :

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y) + \sqrt{1 + y - x^2} \quad \text{et} \quad g(x, y) = \ln(\sqrt{x} - y - 3)$$

(★) **Exercice 3** (5/2 *uniquement*) Représenter les ensembles suivants et indiquer pour chacun, sans démonstration, s'il s'agit d'un ensemble ouvert, fermé, borné.

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\} & D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 2\} \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 2x - 4y \leq 5\} & D_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < |x - 4| < 6\} \\ & & D_5 &= [0, 1] \times [0, 2] \end{aligned}$$

(★) **Exercice 4** $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3xy + x - 4y - 1$ et $a = (1, 0)$ et $u = (-1, 1)$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 . Calculer la matrice hessienne de f en a .
2. Donner l'équation du plan tangent au graphe de f en a .
3. Calculer la dérivée première directionnelle de f en a suivant la direction u .

(★) **Exercice 5** Soit $U =]1, +\infty[\times]0, \frac{1}{2}[$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy(1 - 2y)^{x-1}$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur U .
2. Montrer que pour tout $t \in]0, 1[$ $\ln(1 - t) < -t$.
3. En déduire que f n'admet pas d'extremum sur U .

(★) **Exercice 6** Donner la matrice hessienne en (x, y) de $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 + (x + y)^3$. Même question pour $g : (x, y) \mapsto e^{xy}$.

(★★) **Exercice 7** Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice hessienne de :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xBx^\top \end{pmatrix}$$

(★) **Exercice 8** $f(x, y) = \cos(x + y) + ye^x$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. Donner le gradient et la matrice hessienne de f en (x, y) .
3. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 .

(**) **Exercice 9**

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

1. Vérifier que $f(x) = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$.
 2. Donner le gradient et la Hessienne de f en x .
-

(**) **Exercice 10** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x, y) \neq 0$, on pose $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$.

1. Par quelle valeur peut-on prolonger f par continuité en 0? On note encore f la fonction définie par ce prolongement.
 2. Calculer les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$.
 3. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.
 4. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
 5. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^2 ?
-

(*) **Exercice 11** Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de f .

- | | |
|------------------------|------------------------------|
| 1. $g(x, y) = f(y, x)$ | 3. $g(x, y) = f(y, f(x, x))$ |
| 2. $g(x) = f(x, x)$ | 4. $g(x) = f(x, f(x, x))$ |
-

(**) **Exercice 12** On considère \mathbb{C} muni de sa structure de \mathbb{R} -espace vectoriel. Montrer que la fonction suivante est différentiable en tout point et donner sa différentielle.

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

(*) **Exercice 13** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , de variables x et y . On définit :

$$g(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$$

1. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f .
 2. Exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de g en fonction des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de f .
-

(**) **Exercice 14** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = M^3$. Justifier que f est différentiable et calculer sa différentielle en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(*) **Exercice 15** On étudie $f : M \mapsto M^{-1}$ définie sur l'ouvert $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. En exploitant l'identité $(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2$, établir que l'application f est différentiable en I_n .
 2. En déduire que f est différentiable en toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et exprimer sa différentielle.
 3. Retrouver ce résultat en différentiant à partir de l'égalité $M \times M^{-1} = I_n$.
-

(*) **Exercice 16** (*5/2 uniquement*) Pour f endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien et $u \in E$, montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle + \langle u, x \rangle$ est différentiable en tout point a et donner sa différentielle en a , ainsi que son gradient en a .

(*) **Exercice 17** Soit $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^3 + 3xy + z = 0\}$ et $u = (0, -1, 1)$. Déterminer l'ensemble des points de X en lesquels le vecteur u est tangent à X .

(*** **Exercice 18** (5/2 *uniquement*))

1. Montrer que si A est une matrice antisymétrique d'ordre n à coefficients réels, alors pour tout réel t , $e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ au point I_n .

(*) **Exercice 19** (5/2 *uniquement*) Montrer que $f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(** **Exercice 20** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Pour cela, on préconise d'effectuer le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$.

(*** **Exercice 21** Déterminer les fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

Pour cela, on effectuera le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$.

(*** **Exercice 22** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On note $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (cette quantité s'appelle le laplacien de f). Donner une expression du laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire donner Δf en fonction de dérivées partielles de $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. On commencera par calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

(*** **Exercice 23** (5/2 *uniquement*) Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $A(s)$ et $A(t)$ commutent.

1. Justifier que $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(M)$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.
2. Soit $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(A(t))$. En remarquant que $\Phi(t) = \exp(A(t) - A(t_0)) \exp(A(t_0))$, montrer que

$$\Phi'(t_0) = A'(t_0) \exp(A(t_0))$$

(** **Exercice 24** Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} solutions de l'équation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (*)$$

1. Déterminer les solutions constantes de (*).
2. Soit f une solution non identiquement nulle de (*). Montrer que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, et que f est une fonction paire.
3. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On considère la fonction F définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad F(x, y) = f(x+y) + f(x-y)$$

Justifier que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et calculer les dérivées partielles secondes de F .

On suppose que f est une solution non identiquement nulle de (*). Des expressions de $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme $z'' - \alpha z = 0$.

Donner les solutions de l'équation différentielle $z'' - \alpha z = 0$ suivant les valeurs de α .

4. Déterminer toutes les solutions de (*).

Banque épreuve orale CCINP

Analyse : 33, 52, 57, 58.
