

Ce chapitre est l'occasion de réviser quelques points d'analyse de première année.

(★) **Exercice 1** On demande de raisonner avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.

1. Montrer que pour tout $x \leq 0$, $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}$.
 2. Montrer que pour tout réel x , $|\sin x| \leq |x|$.
 3. Montrer que pour tout $x > 0$, $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{x^3}{6}$.
 4. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|(1+x)^{3/2} - 1 - \frac{3}{2}x| \leq x^2$.
-

(★) **Exercice 2**

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour $f : t \mapsto \sin t$ de classe \mathcal{C}^4 sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ avec $a = 0$ et $x \in I$. En déduire :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

2. Montrer en adaptant la démarche :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(★) **Exercice 3** On demande de raisonner avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}| \leq \frac{x^2}{8}$.
 2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$.
 3. Montrer que pour tout $u \in [-1, 1]$, $|e^{-u} - 1 + u| \leq \frac{3}{2}u^2$.
-

(★) **Exercice 4**

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln 2}{2}$$

(★★) **Exercice 5** a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et ne s'annulant pas sur $[a, b]$.

1. Montrer que : $(f([a, b]) \subset]0, +\infty[$ ou $f([a, b]) \subset]-\infty, 0[$.
2. Montrer :

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } \frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

(★★) **Exercice 6**

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

(★★) **Exercice 7**

Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur $[-1; 1]$ telle que $f(0) = 0$.

- Soient n et k des entiers naturels non nuls, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, que peut-on dire de $\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right|$?
 - En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} f'(0)$.
-

(★) **Exercice 8** Le but de cet exercice est l'étude de l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 1$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$$

On pose $r(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u}}$ et $h(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

- Montrer que $\forall x > 0, 0 \leq F(x) \leq 1$. Étudier la parité de F .
 - Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[, xF'(x) = -F(x) + r(x^4)$.
 - Montrer que pour $x > 0, r(x^4) \leq F(x)$, et en déduire que F est décroissante sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que F est continue en 0.
 - Établir, en utilisant une formule de Taylor,

$$\forall u \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{1}{2}u\right) \leq \frac{3}{8}u^2$$

- En déduire que F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, et déterminer celui-ci.
 - En déduire que F est dérivable en 0 et donner $F'(0)$. Donner la position, au voisinage de 0, de la courbe représentative de F par rapport à sa tangente en 0.
-

(★) **Exercice 9** Calculer la dérivée n^e des fonctions f, g et h suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{x+1}, \quad g : x \mapsto \frac{1}{3x+2}, \quad h : x \mapsto (2x-1)^{15}, \quad i : x \mapsto xe^x \text{ et } j : x \mapsto x^2e^{2x-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}, \quad g(x) = x^2e^{3x} \text{ et } h(x) = x^{n-1} \ln x \text{ (où } n \in \mathbb{N}^* \text{ est justement l'ordre de dérivation)}$$

(★) **Exercice 10** Calculer la dérivée n^e de $f : x \mapsto \frac{x-4}{x^2-5x+6}$.

(★) **Exercice 11** Calculer la dérivée n^e de $h : x \mapsto x^{2n}$ de deux façons différentes : par un calcul direct, et en écrivant $x^{2n} = x^n \times x^n$ et en utilisant la formule de Leibniz.

$$\text{En déduire } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

(★) **Exercice 12** Soient f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ et (H_n) la suite de fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$H_n(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) e^{\frac{x^2}{2}}$$

- Étudier la parité de H_n .
 - Expliciter H_0, H_1, H_2 et H_3 .
 - Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre H_n, H_{n+1} et H'_n .
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme, dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
-

(★) **Exercice 13** Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , la dérivée n^e de f est de la forme $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$.
2. En dérivant n fois la relation $(1+x^2)f(x) = 1$, donner une relation entre P_n , P_{n-1} et P_{n-2} .

(★) **Exercice 14** On considère la fonction f , définie pour $x \neq 1$ par $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$\forall x \neq 1, f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \text{ où } P_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et de coefficient dominant } (-1)^n$$

Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n .

3. (a) Montrer que pour $x \neq 1$, $(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0$.
(b) En utilisant la formule de Leibniz dans la relation précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (n+2-x)P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x)$$

(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P'_n = -nP_{n-1}$.

4. Soient k et n deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ et P_{n-k} . En déduire que $P_n^{(k)}(1) = (-1)^k n!$.
5. Appliquer la formule de Taylor à P_n en 1. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{n!} = e^{1-x}$.

(★★) **Exercice 15** Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^+ dans E , \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On suppose que les fonctions $\|f\|$ et $\|f''\|$ sont majorées par respectivement M_0 et M_2 .

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $h > 0$, on a $\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leq \frac{M_2 h^2}{2}$.
(b) En déduire que pour tout $h > 0$, la fonction $\|f'\|$ est majorée par $2\frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.
(c) En déduire que la fonction $\|f'\|$ est majorée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.
2. Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$.
Quelles sont les bornes de f , f' , f'' sur $[0, 1]$? On rajoute : $f(x) = -\cos(2(x-1))$ pour $x > 1$.
Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^+ et que la majoration de la question précédente est optimale.

(★★) **Exercice 16** Soit E un espace euclidien et v un vecteur non nul de E . Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ telles que $\langle f', v \rangle$ soit une fonction constante.

(★★) **Exercice 17** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que la fonction $n : t \mapsto \|f(t)\|$ est constante. Montrer que pour tout réel t , les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

(★★★) **Exercice 18** Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M(t)^\top M(t) = I_{2n+1}$$

Montrer que la matrice $M'(t)$ n'est inversible pour aucune valeur de t .

(★★) **Exercice 19** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 s'annulant en a . Montrer que :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$$

(***) **Exercice 20** Soient $a < b$ et f et g deux fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On pose :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et calculer $\Delta'(x)$ pour $x \in]a, b[$.
2. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$.

(*) **Exercice 21** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ dérivable en 0 telle que pour tout réel x , $f(2x) = 2f(x)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n - 0}$. En déduire que f est linéaire.

(***) **Exercice 22** (5/2 *uniquement*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soit $f : [0, 1] \rightarrow E$ de classe C^1 .

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\|f(x_0)\| = \sup_{t \in [0, 1]} \|f(t)\|$.
2. Vérifier que $f(x_0) = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \left(\int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx$.
3. En déduire que $\sup_{[0, 1]} \|f\| \leq \int_0^1 \|f'(t)\| dt + \int_0^1 \|f(t)\| dt$

(***) **Exercice 23** (5/2 *uniquement*)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et a et b réels avec $a < b$. On considère $f : [a, b] \rightarrow E$, non nulle et continue, vérifiant de plus :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt$$

On considère le vecteur

$$e_1 = \frac{\int_a^b f(t) dt}{\int_a^b \|f(t)\| dt}$$

1. Montrer que e_1 est bien défini et qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E .
2. On note f_1, \dots, f_n les fonctions coordonnées de f dans \mathcal{B} . Montrer que $f_1 \geq 0$ et que $f = f_1 e_1$.

(***) **Exercice 24** (5/2 *uniquement*)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. On veut montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$.

1. Montrer que A commute avec $\exp(B)$.
2. On considère $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par

$$\varphi(t) = \exp(t(A+B)) \exp(-tB) \exp(-tA)$$

- (a) Justifier (soigneusement) que φ est dérivable.
- (b) Calculer $\varphi'(t)$. Calculer $\varphi(0)$. Qu'en déduit-on en prenant $B = 0$?
- (c) Montrer finalement le résultat, qui sera un résultat de cours : $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$.

Banque épreuve orale CCINP