
Plus facile – Exercice CCINP PC 2023

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(V)$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.
Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.
Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X\,,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2\,.$$

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1\,.$$

Q3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})\,.$$

Q4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

Q5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

Q6. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \, .$$

Q7. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i} \, .$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & j = k \\ 0 & \text{si} & j \neq k \end{array} \right. \, .$$

IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

Q8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

Q9. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

Q10. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

Q11. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q12. En utilisant **Q9**, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.

Q13. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Plus difficile – Extrait CCINP PC 2013

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

$$\begin{aligned} \ker(M) &= \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } MX = 0\}, \\ \operatorname{Im}(M) &= \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}, \\ &\operatorname{Sp}(M) \text{ le spectre de } M, \\ &E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n) \\ \text{et} \quad &\operatorname{Im}_\lambda(M) = \operatorname{Im}(M - \lambda I_n). \end{aligned}$$

On définit $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule : $[A, B] = AB - BA$.
On définit l'endomorphisme $[f, g]$ de E par la formule : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : passée

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

II.1. Dans cette question, on suppose qu'il existe e vecteur propre commun à A et B.

II.1.a. Montrer que $e \in \ker([A, B])$.

II.1.b. Vérifier que $\operatorname{rg}([A, B]) < n$.

Dans toute la suite de cette partie II, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que A et B vérifient la **propriété** $\mathcal{H}$ s'il existe $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \ker([A, B]).$$

II.2. Montrer que si $[A, B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3.a. Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

II.3.b. En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ **la propriété suivante** :

pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\operatorname{rg}([\varphi, \psi]) \leqslant 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ.

II.4. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.

II.5. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_k$ **est vérifiée pour tout entier** $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que A et B **ne vérifient pas la propriété** $\mathcal{H}$.

On note $C = [A, B]$, on suppose que $\operatorname{rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.

II.5.a. Justifier l'existence de $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $Au = \lambda u$ et $Cu \neq 0$.

II.5.b. Vérifier que $\operatorname{Im}(C) = \operatorname{Vect}(v)$ où $v = Cu$.

II.5.c. Montrer que $\operatorname{Im}(C) \subset \operatorname{Im}_\lambda(A)$.

II.5.d. Établir les inégalités suivantes : $1 \leqslant \dim(\operatorname{Im}_\lambda(A)) \leqslant n - 1$.

Pour tout $X \in \operatorname{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.

II.5.e. Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$ et $[B, A - \lambda I_n] = -C$.
En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\operatorname{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f. Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B.

II.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Partie III : passée

Partie IV

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \middle| \; \exists i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } x_i = 0 \right\}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X un vecteur propre de A. On dit que X est **sous forme normale** si :

$$X \in \mathcal{N} \quad \textbf{ou} \quad \text{il existe } \lambda' \in \mathrm{Sp}(A) \text{ et il existe } U \in \mathcal{N} \text{ tel que } X = (A - \lambda' I_n)U$$

IV.1. Dans cette question, on suppose que A possède une valeur propre λ telle que $\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 2$.
Montrer que A admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre λ.

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des **matrices** $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **antisymétriques,** c'est-à-dire telles que $M^\top = -M$.
Pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\varphi(M) = AM + MA^\top$ et $\psi(M) = AMA^\top$.

IV.2.

IV.2.a. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0_n\}$.

IV.2.b. Montrer que les colonnes d'une matrice $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ sont des éléments de $\mathcal{N}$.

IV.2.c. Montrer que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

IV.2.d. Vérifier que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

IV.3. Dans cette question, on suppose que A possède au moins deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2.

On considère X_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 et X_2 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2.

On note $B = X_1 X_2^\top - X_2 X_1^\top$.

IV.3.a. Montrer que B vérifie chacune des propriétés suivantes :

- **i)** $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$;
- **ii)** $B \neq 0_n$;
- **iii)** $AB + BA^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)B$;
- **iv)** $ABA^\top = (\lambda_1 \lambda_2)B$.

IV.3.b. En déduire que $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$.

IV.3.c. Dans cette question, on suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$. Montrer qu'au moins l'une des colonnes de B est un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.3.d. Dans cette question, on suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0_n$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4. Dans cette question, on suppose que A ne possède qu'une seule valeur propre λ.

IV.4.a. Montrer l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ non nulle vérifiant chacune des propriétés suivantes :

- **i)** il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $AB + BA^\top = \alpha B$;
- **ii)** il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que : $ABA^\top = \beta B$.

IV.4.b. Vérifier que $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0_n$.

IV.4.c. Montrer qu'il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0_n$.

IV.4.d. Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B = 0_n$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4.e. Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$ et $\delta = \lambda$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4.f. Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$ et $\delta \neq \lambda$. Montrer que $A - \delta I_n$ est une matrice inversible et en déduire que $(A - \gamma I_n)B = 0$.

IV.4.g. Que conclure ?
