Feuille d'exercices n° 7 **MP**
Réduction (1) **2023-2024**

(✍) **Exercice 1** Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(✍) **Exercice 2** Montrer sans calcul que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

($\star$) **Exercice 3**

Sans calculer les valeurs propres de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$, montrer que B admet au moins une valeur propre strictement positive et au moins une valeur propre strictement négative.

($\star$) **Exercice 4** $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner les éléments propres de M (valeurs propres et espaces propres) vue comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

($\star$) **Exercice 5** Sans gros calculs, trouver les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

($\star\star$) **Exercice 6** Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

($\star$) **Exercice 7** On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Donner les valeurs propres de A.
3. Donner les sous-espaces propres de A.
4. En déduire une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.

($\star$) **Exercice 8** Vrai ou Faux ? Démontrez vos réponses. A est une matrice d'ordre n.

1. Si A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.	Vrai	☐
	Faux	☐
2. Si A^2 est diagonalisable, alors A l'est aussi.	Vrai	☐
	Faux	☐
3. A admet un nombre fini de vecteurs propres.	Vrai	☐
	Faux	☐

(✍) **Exercice 9** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

($\star$) **Exercice 10** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner les valeurs propres de $6M$ en fonction des valeurs propres de M.
2. Plus généralement, pour a et b réels, donner les valeurs propres de $A = aM + bI$ en fonction des valeurs propres de M.

($\star\star$) **Exercice 11** Soit A une matrice vérifiant : $\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, & a_{i,j} \in [0,1] \\ \forall i \in [\![1,n]\!], & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \end{cases}$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

($\star$) **Exercice 12** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

($\star$) **Exercice 13** Soit $n \geqslant 2$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer que $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible.

($\star\star$) **Exercice 14** Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de AB, alors λ est une valeur propre non nulle de BA.
2. On suppose que 0 est valeur propre de AB. On introduit les endomorphismes f et g de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B.
   (a) Montrer que $f \circ g$ n'est pas bijectif.
   (b) On raisonne par l'absurde en supposant que 0 n'est pas valeur propre de BA. Que dire de $g \circ f$? Montrer que g est surjectif et que f est injectif. Montrer que $f \circ g$ est bijectif. Conclure.
3. Quel résultat a été finalement montré dans cet exercice ?

($\star\star$) **Exercice 15** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$.

($\star\star$) **Exercice 16** Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ donné par $f(P) = (X+1)(X+3)P' - XP$. Donner les éléments propres de f.

($\star$) **Exercice 17** Déterminer les éléments propres complexes de $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

($\star\star$) **Exercice 18** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $\ker(A) = \ker(A^2)$.

($\star\star$) **Exercice 19** Soit u un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel E. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $u^2 = \lambda u$.

($\star\star$) **Exercice 20** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = A$, et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par $\varphi(M) = MB - BM$.

1. Calculer $A^kB - BA^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. À quelle condition la matrice A^k est-elle vecteur propre de φ ?
3. En déduire que A est nilpotente.

($\star\star\star$) Exercice 21 Soient u, v des endomorphismes d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie non nulle. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
2. On suppose que $u \circ v = 0$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

($\star$) Exercice 22 Soit $n \geqslant 3$, a et b complexes avec $b \neq 0$. Donner les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable ?

($\star$) Exercice 23 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant strictement négatif. Montrer que A possède au moins une valeur propre réelle.

($\star\star\star$) Exercice 24 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}$. En multipliant à droite et/ou à gauche la matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

par des matrices triangulaires par blocs convenables, établir : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

($\star$) Exercice 25 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = BA$ avec A nilpotente. Calculer $\mathrm{Tr}(AB)$.

($\star$) Exercice 26 Donner le spectre, et étudier la diagonalisabilité des matrices :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

($\star$) Exercice 27 Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables et les diagonaliser :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

($\star\star$) Exercice 28 Donner les éléments propres des endomorphismes de E dans les situations suivantes :

1. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $T : f \mapsto T(f)$, où $T(f)(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)e^t \,\mathrm{d}t$
2. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\Phi : u \mapsto v$ donnée par $\begin{cases} v_0 & = u_0 \\ v_n & = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$
3. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : M \mapsto M^\top$
4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\psi : M \mapsto M + \mathrm{Tr}(M) I_n$

(☕) Exercice 29 Soit $p \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ et x réel, on pose :

$$u(f)(x) = f(px + q) \qquad \varphi(x) = px + q$$

1. On admet que u est un endomorphisme de E. Montrer que u est un automorphisme.

2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset]-1,1] \setminus \{0\}$ (on pourra étudier, pour f vecteur propre de u et x réel tel que $f(x) \neq 0$, la suite $(\varphi^n(x))_n$).
3. Montrer que si f est un vecteur propre de u, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k)} = 0$.

($\star$) **Exercice 30** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\chi_A = \chi_{A^\top}$. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^\top)$.

($\star\star$) **Exercice 31** Soit E un espace vectoriel de dimension $2n+1$, de base $(e_1, \ldots, e_{2n+1})$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par :

$$u(e_1) = e_1 + e_{2n+1} \qquad u(e_i) = e_{i-1} + e_i \text{ pour } i \in [\![2, 2n+1]\!]$$

1. Donner le polynôme caractéristique de u.
2. Donner les valeurs propres complexes de u.
3. En déduire $\prod_{k=0}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1})$.

($\star\star$) **Exercice 32** Soit A une matrice d'ordre $n \geqslant 2$ et de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

($\star$) **Exercice 33** Soit $f : M \mapsto M + 2M^\top$, endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les éléments propres de f. f est-il diagonalisable ?
2. Calculer $\mathrm{Tr}(f)$ et $\det(f)$.

($\star\star$) **Exercice 34** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer alors $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

($\star$) **Exercice 35** Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

($\star\star$) **Exercice 36** Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. On étudie l'équation $(E) : M^2 - M = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser A en précisant une matrice de passage P.
2. Soit M une solution de E. Justifier que $P^{-1}MP$ est diagonale.
3. Résoudre (E).

Banque épreuve orale

Algèbre : 59, 67, 69, 70, 72 (subtil et intéressant), 73 (recherche d'un commutant), 74 (système différentiel), 75 (système différentiel), 83.