Feuille d'exercices n° 5 **MP**
Réduction (2) **2024-2025**

($\star$) Exercice 1 – Différentes méthodes de calculs de puissances de matrice

1. *Formule du binôme*
   Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. À l'aide de la formule du binôme, déterminer A^n pour $n \geqslant 1$.

2. *Utilisation d'une division euclidienne par un polynôme annulateur*
   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On admet, ce qui se démontre par calcul matriciel, que $A^2 - 3A + 2I = 0$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est $(2^n - 1)X - (2^n - 2)$.
   (b) En déduire une expression de A^n en fonction de A et I.

3. *Utilisation de la diagonalisation*
   Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et en déduire A^n pour n entier naturel.

($\star$) Exercice 2
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres.
Montrer que la famille $(I, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

($\star\star$) Exercice 3
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. (a) Soient A et Q deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que Q est inversible. Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P(Q^{-1}AQ)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.
   (b) Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$. Expliciter $P(D)$.
2. (a) Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts et φ l'application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le n-uplet $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$.
   Montrer que l'application φ est bijective.
   (b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
   Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait $\lambda_i \times P(\lambda_i) = 1$.
   Que vaut $T \times P(T)$? Qu'en déduit-on ?
3. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égal à $P(A)$.

($\star$) Exercice 4 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
   (b) En déduire une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$. On pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_n = P^{-1} X_n$$

   (a) Quelle relation a-t-on entre X_{n+1}, X_n et A ?
   (b) En déduire l'expression de Y_n en fonction de n, D et Y_0.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0, x_1 et x_2 pour que la suite (x_n) soit convergente.
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0, x_1 et x_2 pour que la série $\sum x_n$ soit convergente.

($\star\star$) Exercice 5 Soit a, b et c des réels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $M = UU^\top$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de M. Qu'en déduit-on ?
2. Donner les espaces propres de M.

($\star$) Exercice 6 Déterminer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

($\star\star$) Exercice 7 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 3. On suppose que -1 et 1 sont valeurs propres de f et que $f^4 = f^2$. Montrer que f est diagonalisable.

($\star\star$) Exercice 8 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - I_n = M^\top$. Montrer que M est diagonalisable.

($\star\star\star$) Exercice 9

1. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $M^n = I_n$ et $\mathrm{Tr}(M) = n$.
2. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $M(M - I_n)^3 = 0_n$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

($\star\star$) Exercice 10 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension $n \geqslant 1$. On suppose que f possède 1 pour seule valeur propre. Montrer que l'endomorphisme $f - \mathrm{Id}_E$ est nilpotent.

($\star$) Exercice 11 Soit $A \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose de plus que $\mathrm{Tr}(A) = 8$. Déterminer χ_A puis π_A.

($\star\star$) Exercice 12 Le polynôme $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice M de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$?

($\star\star$) Exercice 13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi \in \mathscr{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ défini par $\Phi : M \mapsto AM$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\Phi)(M) = P(A)M$.
2. En déduire que Φ est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

($\star\star$) Exercice 14 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est le noyau d'un polynôme en f.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec A inversible.
4. On enlève l'hypothèse de dimension finie de E. Montrer que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

($\star\star\star$) **Exercice 15** Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables et qui commutent. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v.

($\star\star\star$) **Exercice 16** Soit $P = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}$. Montrer que le polynôme minimal de A est P.

($\star\star$) **Exercice 17** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A(A^2 + A + I_n) = 0$. Montrer que le rang de A est pair et que sa trace est un entier.

($\star\star$) **Exercice 18** Soit u un endomorphisme bijectif d'un espace de dimension finie $n \geqslant 1$. Montrer que u^{-1} est un polynôme en u. Indication : on utilisera le théorème de Cayley-Hamilton.

($\star\star$) **Exercice 19** Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ par diagonalisation et d'une autre façon, de votre choix.

($\star\star\star$) **Exercice 20** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ matrice par blocs de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Diagonaliser $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. On demande P, D et P^{-1}.
2. Montrer alors que B est semblable à $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.
3. En déduire que si A est diagonalisable, B l'est aussi.
4. Pour Q polynôme, exprimer $Q(C)$ sous forme de matrice diagonale par blocs. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.

($\star\star$) **Exercice 21** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A.
2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. (*après le chapitre Séries vectorielles*) Calculer $\exp(B)$.

($\star\star$) **Exercice 22** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projecteur et $F \in \mathscr{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donné par

$$F(M) = \frac{1}{2}(AM + MA)$$

1. Donner un polynôme annulateur de F.
2. Montrer que F est diagonalisable.

($\star\star\star$) Exercice 23 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que le polynôme $P = X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de u.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel.
2. Soit F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. Montrer que le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u et est en somme directe avec F.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et qu'en particulier, n est pair.

Banque épreuve orale CCINP

Algèbre : 62, 65, 68, 70, 88, 91, 93.
