

(♣) **Exercice 1** Soient E un ensemble et $x \in E$. Montrer que $S(x) = \{\sigma \in \mathcal{S}_E \mid \sigma(x) = x\}$ est un sous-groupe de (\mathcal{S}_E, \circ) .

(★) **Exercice 2** Soit (G, \cdot) un groupe. Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$ est un sous-groupe de G (on l'appelle *centre* de G).
2. Montrer que pour H sous-groupe de G et $a \in G$, $aHa^{-1} = \{aha^{-1}, h \in H\}$ est un sous-groupe de G .

(♣) **Exercice 3**

1. Définir \mathbb{U} . Montrer que \mathbb{U} est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
2. Définir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, \mathbb{U}_n . Montrer que \mathbb{U}_n est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & z^n \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme de groupes.
 - (b) En considérant le noyau de f , retrouver le résultat de 2).
 - (c) f est-il injectif? Pourquoi f est-il surjectif? Donner $\text{Im } f$.
4. On pose $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{pmatrix}$
 - (a) Montrer g est un morphisme du groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe (\mathbb{C}^*, \times) .
 - (b) Déterminer le noyau de g . g est-il injectif?
 - (c) En considérant l'image de g , retrouver le résultat de 1). g est-il surjectif?
5. On pose $h : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathbb{R}^* \\ z & \mapsto & |z| \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que h est un morphisme du groupe (\mathbb{C}^*, \times) dans le groupe (\mathbb{R}^*, \times) .
 - (b) En considérant le noyau de h , retrouver 1).
 - (c) Donner sans démonstration $\text{Im } h$ et $\ker h$ et dire si h est injectif, surjectif.

(♣) **Exercice 4** Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que G est un groupe pour le produit matriciel.

(★) **Exercice 5** Dans chacun des cas suivants, déterminer si H est ou non un sous-groupe de G .

1. $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ et $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$
2. $G = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et H est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de G .
3. $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$ et H est l'ensemble des matrices de G à coefficients dans \mathbb{Z} .
4. $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et H est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux valant 1.
5. $G = \mathcal{S}_n$ et $H = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(1) = 2\}$.

(★★) **Exercice 6** On pose $G =]-1, 1[$.

1. Montrer que th induit une bijection de \mathbb{R} sur G .
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\text{th}(a + b) = \frac{\text{th}(a) + \text{th}(b)}{1 + \text{th}(a)\text{th}(b)}$.
3. Pour $(x, y) \in G^2$, on pose $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. À l'aide des questions précédentes, montrer que (G, \star) est un groupe commutatif.
4. Soit $x \in G$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^{\star n} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$ où $x^{\star n}$ désigne l'itéré $x \star x \star \dots \star x$.

(★) **Exercice 7** Soit G un groupe, et $f : G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$. Montrer que f est un automorphisme de G si et seulement si G est commutatif.

(☛) **Exercice 8** Théorème de Lagrange.

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Pour $a \in G$, on note $aH = \{ah, h \in H\}$.

1. Montrer que les ensembles aH sont disjoints ou confondus.
2. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G . En déduire le théorème de Lagrange du cours.
3. Application : décrire $H \cap K$ lorsque K et H sont deux sous-groupes de G de cardinaux premiers entre eux.

(★★) **Exercice 9** Décrire les sous-groupes finis de (\mathbb{C}^*, \times) .

(★★) **Exercice 10** Soit $(G, +)$ un groupe abélien, et H et K deux sous-groupes de G . Montrer que le groupe engendré par $H \cup K$ est

$$H + K = \{h + k, h \in H, k \in K\}$$

(★) **Exercice 11** Soit (G, \cdot) un groupe. On définit une relation binaire sur G par : $x \mathcal{R} y$ s'il existe $g \in G$ tel que $x = g^{-1}yg$.

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Déterminer le cardinal de la classe d'équivalence de 1_G .
3. Si G est abélien, montrer que les classes d'équivalence sont des singletons.
4. Montrer que si $x \mathcal{R} y$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 1_G$, alors $y^n = 1_G$.

(★★★) **Exercice 12** Soit G un groupe non réduit à un élément tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$.

1. Montrer que tout élément est égal à son propre inverse. En déduire que G est abélien.
2. Montrer que G possède au moins un sous-groupe de cardinal 2.
3. On suppose que G contient au moins trois éléments. Soit H un sous-groupe fini de G , différent de $\{e\}$ et de G , et soit $g \in G \setminus H$. On pose alors $gH = \{gh, h \in H\}$.
 - (a) Montrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de cardinal $2|H|$.
 - (b) Montrer que si G est fini, alors son cardinal est une puissance de 2 (on pourra raisonner par l'absurde).

(★★) **Exercice 13** Donner les tables de multiplication de \mathbb{U}_4 et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$. Prouver alors que ces deux groupes ne sont pas isomorphes, bien que de même cardinal.

(★) **Exercice 14** Soit G un groupe et $a \in G$. On considère $f : \begin{pmatrix} (\mathbb{Z}, +) & \rightarrow & G \\ k & \mapsto & a^k \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que f est un morphisme de groupes.
2. À quel groupe correspond l'image de f ?

3. En distinguant les cas : a est d'ordre infini et a est d'ordre fini, noté n , déterminer le noyau de f .

(**★**) **Exercice 15** On considère l'ensemble des permutations \mathcal{S}_n de $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n \geq 3$, et la transposition $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ et le cycle $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

1. Calculer $c \circ t \circ c^{-1}$ et $c^2 \circ t \circ c^{-2}$.
 2. Justifier que \mathcal{S}_n est engendré par c et t .
 3. Existe-t-il une partie génératrice de \mathcal{S}_n constituée d'un seul élément ?
-

(**♣**) **Exercice 16** Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. En déduire leur signature.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(**★**) **Exercice 17** Montrer par récurrence sur n que toute permutation de \mathcal{S}_n est produit d'au plus $n - 1$ transpositions.

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ en produit d'au plus 3 transpositions.

(**★**) **Exercice 18** Soient (G, \cdot) un groupe multiplicatif, et a et b dans G .

1. Montrer que a et bab^{-1} ont le même ordre.
 2. Montrer que ab et ba ont le même ordre.
-

(**★★**) **Exercice 19** Soit G un groupe multiplicatif et $a \in G$.

1. On suppose que a est d'ordre 21. Quel est l'ordre de a^3 ? de a^5 ? de a^{12} ?
 2. On suppose que a est d'ordre n . Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de a^k ?
-

(**★★**) **Exercice 20** Soit G un groupe abélien fini de cardinal n et k un entier premier avec n . Montrer que l'application $f : G \rightarrow G, x \mapsto x^k$ est bijective (on étudiera son noyau).

(**★★**) **Exercice 21** Soit G un groupe cyclique de générateur a et H un sous-groupe de G .

1. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel non nul n tel que $a^n \in H$.
 2. Établir que H est le groupe engendré par a^n .
 3. En déduire que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est lui-même cyclique.
-

(**★★**) **Exercice 22** Soit G un groupe.

1. Montrer que si G est fini alors l'ensemble des sous-groupes de G est fini.
 2. Réciproquement, on suppose que l'ensemble des sous-groupes de G est fini. Montrer que tout élément de G est d'ordre fini, puis montrer que G est fini.
-

(**★★**) **Exercice 23** Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$, puis déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

(**★★**) **Exercice 24** On rappelle que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Montrer que les endomorphismes de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ continus sont les homothéties (applications $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$).
