Feuille d'exercices n° 4 **MP**
Familles sommables **2023-2024**
Procédés de sommation

($\star$) **Exercice 1** Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ en fonction de $\sum\limits_{?}^{?} a_{2k}$ et $\sum\limits_{?}^{?} a_{2k+1}$.

($\star$) **Exercice 2** Soient a et $b \in \mathbb{C}$. Montrer (sans faire de récurrence) que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

($\star$) **Exercice 3** Montrer que $\sum \frac{1}{(2k)!}$ et $\sum \frac{1}{(2k+1)!}$ convergent, et calculer

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$$

($\star$) **Exercice 4** On donne la formule : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Calculer $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |i-j|$.
2. Calculer $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} (i+j)$.
3. Pour i fixé entre 1 et n, calculer $\sum\limits_{j=1}^{n} \min(i,j)$.
4. Calculer $S_1 = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=i}^{n} \frac{i}{k+1}$ (réponse $\frac{n(n+1)}{4}$).
5. Calculer $S_2 = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=i}^{n} \frac{i^2}{k+1}$ (réponse $\frac{n(n+1)(4n+5)}{36}$).

($\star\star$) **Exercice 5** Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

($\star\star$) **Exercice 6** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

($\star\star$) **Exercice 7** Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de puissances successives de $\cos x$ et $\sin x$.

($\star$) **Exercice 8** Calculer les deux sommes : $S_n = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n,\, k \text{ pair}} \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n,\, k \text{ impair}} \binom{n}{k}$.

($\star\star$) **Exercice 9** Calculer $(1+i)^n$ de deux façons différentes et en déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{k | 0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k | 0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$$

($\star$) **Exercice 10**

1. Montrer que, pour $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$.
2. En déduire les sommes $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ et $S_2 = \sum\limits_{k=i}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{k}{i}$.

($\star$) **Exercice 11** En utilisant la formule de Pascal, éventuellement par récurrence (mais pas obligatoirement !), montrer que pour tout couple (n,p) d'entiers naturels vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

($\star\star$) **Exercice 12**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier l'identité $\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
2. En déduire la valeur de la somme harmonique alternée : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

($\star\star$) **Exercice 13** Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose

$$u_{n,p} = \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n - \frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^n$$

Calculer

$$\sum_{p=1}^{\infty} u_{n,p}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,p}\ ,\ \text{ puis } \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} u_{n,p} \text{ et } \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,p}$$

Commentaire ?

($\star$) **Exercice 14** En discutant suivant les valeurs du réel α, étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(p+n)^\alpha}\right)_{p,n\geqslant 1}$.

($\star$) **Exercice 15** Montrer l'identité : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

($\star$) **Exercice 16** On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la famille $(u_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme, où $u_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{p^2(q-p)!} & \text{si } p \leqslant q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.

($\star$) **Exercice 17** Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

($\star\star\star$) **Exercice 18** Soient a et b des nombres complexes distincts de module strictement inférieur à 1. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{1}{1-a} \times \frac{1}{1-b}$$

($\star\star$) **Exercice 19** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_0 = 0 = b_0$ et $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = b_n$ si $n \geqslant 1$.

1. Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.
2. Montrer la divergence (grossière) de leur série produit de Cauchy.

Banque épreuve orale : 89.