**Feuille d'exercices n° 4** **MP**
**Séries numériques (et vectorielles)** **2024-2025**
**Révisions sur les suites numériques**

## Révisions sur les suites numériques

($\star$) **Exercice 1** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$. Montrer que $(u_n)$ est monotone et convergente.

---

($\star$) **Exercice 2** Soit $f(x) = 2xe^{-x}$ et la suite $u$ donnée par $\begin{cases} u_0 & = 0,1 \\ u_{n+1} & = f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
2. Montrer que la suite $u$ converge vers $\ln 2$.

---

($\star\star\star$) **Exercice 3** Étudier la suite donnée par $u_0 \geqslant -2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. On sera amené à discuter suivant les valeurs de $u_0$.

---

($\star$) **Exercice 4** Étudier la monotonie et la convergence des suites réelles suivantes :

1. $u$ donnée par son premier terme $u_0$ et la relation $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.
2. $v$ donnée par son premier terme $v_0$ et la relation $v_{n+1} = v_n - e^{v_n}$.
3. $w$ donnée par : $w_0 > 0$ et la relation de récurrence $w_{n+1} = \sqrt{w_n^2 + w_n}$.

---

($\star$) **Exercice 5** On pose, pour tout réel $x$, $f(x) = x^2 - x$ et on considère la suite $u$ définie par la valeur de $u_0$ réel et la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$.

1. Étudier rapidement les variations de $f$ et déterminer le signe de $f(x) - x$.
2. On suppose que $u_0 > 2$.
   (a) Montrer que $u_n > 2$ pour tout entier naturel $n$.
   (b) En déduire la monotonie de $(u_n)$. Préciser la limite de $u_n$ quand $n \to +\infty$.
   (c) Montrer que pour tout réel $x$ supérieur ou égal à 2, $f'(x) \geqslant 3$. En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 3(u_n - u_{n-1})$, puis que $u_{n+1} - u_n \geqslant 3^n(u_1 - u_0)$.
   (d) Retrouver alors le résultat de b).
3. Ici $u_0 = -3$. Que peut-on dire quant à la convergence de $(u_n)$ ?
4. On suppose ici que $\frac{1}{2} < u_0 < 2$. Dans le cas où « $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} < u_n < 2$ », que peut-on dire de la monotonie et de la convergence de $(u_n)$ ? En déduire qu'il existe un entier $n_0$ tel que $u_{n_0} \notin \left]\frac{1}{2}, 2\right[$.

---

($\star\star$) **Exercice 6** On considère la fonction $f_n$ définie, pour tout réel $x$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1$$

1. Montrer que, pour $n$ entier supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel $u_n$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$. Donner un équivalent de $u_n$.

---

($\star\star$) **Exercice 7** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \ln x + x - n$.

1. Étudier les variations de $f_n$ et montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n$.

2. (a) Montrer que pour $x > 0$, $\ln x \leqslant x$.
   (b) Montrer que $\frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$.
   (c) Donner un équivalent de $x_n$ puis montrer que $x_n = n - \ln n + o(\ln n)$.

---

**($\star\star$) Exercice 8**

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $y_n$ solution de l'équation : $\ln x + x = \frac{1}{n}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(y_n)$. En notant $\ell$ sa limite, donner un équivalent de $y_n - \ell$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

---

**($\star$) à ($\star\star$) Exercice 9**

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{p\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$.
2. Soit $x$ réel. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}$.
3. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$$
4. Donner un équivalent de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, de $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$ et $n^2 \ln(\cos(\frac{1}{n})) + \frac{n^2}{2} \sin^2(\frac{1}{n})$.
5. Donner le développement asymptotique à 3 termes de
   (a) $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$
   (b) $(n+1)\ln(n+1) - n \ln n$

---

**($\star$) Exercice 10** Étudier la convergence de $(z_n)$, $z_n = \dfrac{n^2 + in + 2}{in^2 + 1}$.

---

## Séries numériques

**($\star$) Exercice 11** Étudier la nature des séries de terme général $u_n$ dans les cas suivants :

1. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{\pi}{2n}$
2. $b_n = \dfrac{n-1}{3^n - 2}$
3. $c_n = \cos(\dfrac{1}{n}) - 1$
4. $d_n = \ln\left(\cos(\dfrac{2}{n})\right)$
5. $e_n = ne^{-\sqrt{n}} \ln n$
6. $f_n = \dfrac{\cos(2n)}{3n^2 - 4n + 1}$
7. $g_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n}$
8. $h_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} \ln n}$
9. $i_n = \dfrac{\ln n}{n}$
10. $j_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

---

**($\star$) Exercice 12** Vérifier que

$$\frac{1}{\binom{n+p}{n}} = \frac{p!}{p-1}\left(\frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+2)}\right)$$

et en déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ converge et calculer sa somme (réponse $\frac{p}{p-1}$).

---

**($\star$) Exercice 13** Soit $u$ la suite donnée par $\begin{cases} u_0 \in ]0;1[ \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]0,1[$, que $(u_n)$ est décroissante et étudier sa convergence.
2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et donner sa somme.
3. Montrer que $\sum \ln(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$ diverge.

4. En déduire, par utilisation d'un théorème de comparaison, que $\sum u_n$ diverge.

---

**(⋆⋆) Exercice 14** On considère la suite donnée par $u_0 = -1$ et par la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}}\right)$.

1. Calculer $u_1$. Étudier la monotonie de $(u_n)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{2})^{-n}$ (on pourra utiliser une quantité conjuguée).
3. En déduire que $(u_n)$ converge.

---

**(⋆⋆) Exercice 15** Soit $(u_n)$ une suite à termes positifs ou nuls. Montrer que les séries de termes généraux $u_n$, $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ sont de même nature.

---

**(⋆⋆) Exercice 16**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$. Montrer que cette quantité est bien définie.
2. Montrer que $0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(n+1)^2 2^n}$. En déduire une fonction Python permettant de calculer une valeur approchée de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$ à une précision $\varepsilon > 0$ près.

---

**(⋆⋆) Exercice 17** On considère la série de terme général $u_n = \frac{\sin(2^n)}{2^n}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge absolument. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $R_n = S - S_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $|R_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
3. Écrire une fonction Python pour l'obtention d'une valeur approchée de $S$ à $10^{-p}$ près.

---

**(⋆⋆⋆) Exercice 18** Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\pi} (\frac{1}{2\pi}t^2 - t)\cos nt \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in ]0, \pi]$,
$$\sum_{n=1}^{N} \cos nt = \frac{1}{2}\sin(Nt)\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\cos(Nt) - \frac{1}{2}$$
3. Soit $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que
$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(Nt)\,\mathrm{d}t = 0 = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\cos(Nt)\,\mathrm{d}t$$
4. Soit $h$ définie sur $[0, \pi]$ par $h(t) = \frac{t}{\sin\frac{t}{2}}$ pour $t \neq 0$ et $h(0) = 2$.
   En appliquant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que $h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
5. Montrer finalement que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

---

**(⋆) Exercice 19** Montrer que $(n+1)\ln(n+1) - n\ln n \sim \ln n$ et en déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \ln k$.

---

**(⋆) Exercice 20** On considère la suite donnée par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ converge et donner sa limite.
2. Donner la limite de la suite $(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n})$. En déduire un équivalent de $u_n$.

---

**($\star\star$) Exercice 21** On pose $u_n = \dfrac{n!e^n}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $a_n = \ln(u_n)$.

1. Rappeler la formule de Stirling. En déduire $\lim u_n$.
2. Montrer que $a_{n+1} - a_n \sim -\frac{1}{12n^2}$. En déduire que $a_n \sim \frac{1}{12n}$.
3. Montrer finalement que $n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left(1 + \dfrac{1}{12n} + o(\dfrac{1}{n})\right)$.

---

**($\star\star\star$) Exercice 22** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n}}{n}$.

1. Montrer que la suite $u$ diverge. En déduire que $\lim u_n = +\infty$.
2. Montrer que $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \sim \ln(n+1) - \ln(n)$.
3. Montrer finalement que $u_n = \ln(\ln n) + o(1)$.

---

**($\star\star\star$) Exercice 23** Soit $u$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
On pose $w_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$.

1. Montrer que $u_n$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $w_n \sim 1$ et en déduire un équivalent de $u_n$.
3. Montrer que $w_n - 1 \sim \frac{1}{2n}$ et en déduire un développement asymptotique de $u_n$ à une précision $o(\frac{\ln(n)}{n})$.

---

**($\star$) à ($\star\star$) Exercice 24** Soit $(u_n)$ une suite telle que $u_n = \frac{\cos(u_{n-1})}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ?
2. Déterminer la limite de $(u_n)$, un équivalent de $u_n$, et la nature de la série $\sum u_n$.
3. À l'aide d'un développement asymptotique de $u_n$, donner la nature de la série $\sum(-1)^n u_n$.

---

**($\star\star$) Exercice 25**

1. (a) Montrer que $\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ?
   (c) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt{n}}$ diverge. Commentaire ?
2. En discutant sur le réel $\alpha > 0$, déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + n^\alpha}$.

---

**($\star\star$) Exercice 26** En discutant sur les paramètres réels $a$ et $b$, donner la nature des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^a} \qquad \text{et} \qquad \sum \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^b})$$

---

**($\star$) Exercice 27** Déterminer la nature des séries de terme général :

$$a_n = n \sin\frac{1}{n} \quad b_n = \frac{e^{-2n} + n}{n^2 + 1} \quad c_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

---

**($\star$) Exercice 28**

1. Trouver trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$, on ait : $\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+2}$. Montrer que $\sum \frac{2n-1}{n^3-4n}$ converge et calculer $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

2. Montrer par deux méthodes que $\sum \ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ converge. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

---

**(⋆⋆) Exercice 29** On admet (vu en cours) que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. On se propose de déterminer un équivalent de : $u_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$, $\ln u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.
2. Montrer que $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.
3. Montrer que la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ diverge.
4. On considère $a_n = \ln u_n - \ln(u_{n-1}) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{(-1)^{3n}}{3n\sqrt{n}}$. Donner la nature de la série de terme général $a_n$.
5. On pose $C_n = \sum\limits_{k=3}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{(-1)^{3k}}{3k\sqrt{k}} + a_k\right) + \frac{3}{4} + \ln u_2 - \frac{1}{2}\gamma$. Justifier que la suite $(C_n)$ est convergente.
6. En déduire l'existence d'une constante $C$ telle que $\ln u_n = -\frac{1}{2}\ln n + C + o(1)$. Donner alors un équivalent de $u_n$.

---

**(⋆) Exercice 30**

1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ converge et donner sa somme.
2. (a) Donner un équivalent de $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Retrouver que la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ converge.
   (b) Déduire de a. la nature de la série de terme général $ku_k$.

---

**(⋆) Exercice 31** Pour $n$ entier naturel non nul, on pose $I_n = \int\limits_1^e x^2 (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\forall x \in [1, e]$, $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.
   (b) En déduire qu'il existe une constante $k \neq 0$, à préciser, telle que $I_n \sim \frac{k}{n}$.
   (c) Quelle est la nature de la série de terme général $I_n$ ?
   (d) Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n \frac{I_n}{n}$ ?
3. On donne $I_0 = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$. Écrire un programme en `Python` qui calcule et affiche les valeurs de $I_1, \ldots, I_{50}$. Retrouvez-vous 1.b. et pourquoi ?

---

**(⋆) Exercice 32** $x$ désigne un réel élément de $[0, 1[$.

1. (a) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ et pour tout $t$ de $[0, x]$, calculer la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.
   (b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int\limits_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.
   (d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.
2. (a) Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente.
   (b) Utiliser la première question pour établir que : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

**($\star$) Exercice 33**

1. Pour $k$ entier supérieur ou égal à 2, montrer que : $\int\limits_{k-1}^{k} (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant (\ln k)^2 \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t$. Vérifier que l'inégalité de droite est aussi vérifiée pour $k = 1$.
2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} (\ln k)^2$.
   (a) Montrer que pour $n \geqslant 3$, on a : $\int\limits_{1}^{n} (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int\limits_{1}^{n} (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t + (\ln n)^2$.
   (b) Vérifier que la fonction $t \mapsto t((\ln t)^2 - 2\ln t + 2)$ est une primitive de $t \mapsto (\ln t)^2$.
   (c) Montrer alors que $S_n \sim n(\ln n)^2$.
3. On pose $b_n = n(\ln n)^2$ et $w_n = S_n - b_n$, pour $n \geqslant 2$, et $w_1 = 0$.
   (a) Vérifier que $w_n = \sum\limits_{k=2}^{n} (w_k - w_{k-1})$.
   (b) Montrer que $w_k - w_{k-1} \sim -2\ln k$. En déduire que $\lim w_n = -\infty$.

---

**($\star$) Exercice 34** En discutant en fonction de $a \in \mathbb{R}$, donner la nature de la série $\sum (n^3 + an)^{1/3} - \sqrt{n^2+3}$.

---

**($\star\star$) Exercice 35** Donner un équivalent de $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$ (on pourra effectuer une comparaison série-intégrale).

---

## Séries vectorielles (pour plus tard)

**($\star$) Exercice 36** Prouver la convergence et déterminer la somme de la série $\sum A^k$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

**($\star$) Exercice 37** Soit $a \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence de la série $\sum A^n$ où $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

**($\star\star$) Exercice 38** Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $D(P) = P'$ et $T(P) = P(X+1)$. On admet que $D$ et $T$ sont des endomorphismes de $E$. Montrer que la série $\sum \frac{D^k}{k!}$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} = T$.

---

**($\star\star$) Exercice 39** Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to E$ pour laquelle il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

1. Montrer que $f$ possède au plus un point fixe (vecteur $v$ tel que $f(v) = v$).
2. Soit $a \in E$ et la suite $u$ définie par $u_0 = a$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.
   (b) En déduire que $f$ admet un point fixe.

---

## Banque épreuve orale CCINP

Séries numériques : 5, 6, 7, 8. 1), 43, 46.
Séries vectorielles : 61.