
(★) Exercice 1

On donne ici la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$.

1. En déduire sans calcul la valeur de $J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$.

2. À l'aide de changements affines, calculer alors $K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et $L = \int_0^{+\infty} e^{-25x^2} dx$.

(★) Exercice 2

À l'aide de changements de variables affines, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(t-1)^2} dt \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{25+t^2} dt \quad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+3} dt$$

(★) Exercice 3

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx & I_2 &= \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx & I_3 &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ I_4 &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt & I_5 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx & I_6 &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^x} dx \\ I_7 &= \int_{-\infty}^0 e^x \cos(x^2) dx & I_8 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{ax}} dx \end{aligned}$$

(★) Exercice 4

Étudier la nature de $\int_0^2 \frac{1-e^t+a \sin t}{t^2} dt$, a étant un paramètre réel.

(★) Exercice 5

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$ converge. La calculer en faisant le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

(★★) Exercice 6

Montrer que les intégrales I et J convergent et sont égales, où $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{-\ln x}{1+x^2} dx$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ converge et donner sa valeur.

() Exercice 7**

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes (α et β sont des réels) :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t(1+\sqrt{t})} dt, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta} dt, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}} dt$$

(*) Exercice 8

1. Décomposition en éléments simples. Trouver a, b, c réels tels que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, on ait :

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$$

2. Les intégrales suivantes convergent-elles ? Si oui, donner leur valeur.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t(1+t)^2} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt$$

(*) Exercice 9

Soit $f : t \mapsto \frac{t \sin t}{t^2 + 1}$. On considère : $I_1 = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $I_2 = \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$.

1. (a) Pour x réel, on introduit $I(x) = \int_0^x f(t) dt$. Montrer que

$$I(x) = -\frac{x \cos x}{1+x^2} + \int_0^x \frac{(1-t^2) \cos t}{(t^2+1)^2} dt$$

- (b) En déduire que l'intégrale I_1 est une intégrale convergente.

2. Pour x réel et $k \in \mathbb{N}$, on introduit $J(x) = \int_0^x |f(t)| dt$ et $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{t |\sin t|}{1+t^2} dt$.

- (a) Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

- (b) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \int_0^\pi \frac{(t+k\pi) \sin t}{(t+k\pi)^2+1} dt$. En déduire que $u_k \geq \frac{2k\pi}{[(k+1)\pi]^2+1}$.

- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2k\pi}{[(k+1)\pi]^2+1} = +\infty$.

- (d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(n\pi) = +\infty$.

- (e) En déduire que l'intégrale I_2 est une intégrale divergente.

3. En rapport avec la propriété de convergence absolue du cours, que montre cet exercice ?
-

() Exercice 10**

1. Par décomposition en éléments simples, montrer que $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)} dt$ converge et la calculer

(réponse : $I = \frac{\ln 2}{2}$).

2. En déduire que $J = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ converge et donner sa valeur.

(★) à (★★) Exercice 11

Déterminer la nature des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x} + x^2} dx \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \sin(t) \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) dt$$

(★) Exercice 12

Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ converge, et la calculer avec le changement de variables $u = \frac{1}{t}$.

(★★) Exercice 13

Soit $\alpha \in]0, 1]$. Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$. Pourquoi en déduit-on la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$?

(★★) Exercice 14  Montrer que si f et g sont de carré intégrable, alors fg est intégrable.

(★) Exercice 15 Calculer $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$:

- par primitive usuelle,
 - par changement de variable $t = \sin u$.
-

(★) Exercice 16 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ | 4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$ |
| 2. $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$ | 5. $\int_0^{+\infty} \sin(\frac{1}{t^2}) dt$ |
| 3. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ | |
-

(★★) Exercice 17 Étudier l'intégrabilité des fonctions sur les intervalles considérés :

- | | |
|--|--|
| 1. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$ | 3. $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ sur $]0, 1[$. |
| 2. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ sur $]0, 1]$ | |
-

(★★) Exercice 18 Représenter dans un repère orthonormé du plan l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) pour lesquels l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(t-1)^y}$ converge.

(★★★) Exercice 19 Intégrales de Bertrand. Pour α et β réels, on étudie la nature de l'intégrale

$$I_{\alpha, \beta} = \int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$$

1. On suppose que $\alpha < 1$. En utilisant la limite quand t tend vers $+\infty$ de $t \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, donner la nature de $I_{\alpha, \beta}$.
 2. On suppose que $\alpha > 1$. Montrer que l'intégrale étudiée converge.
 3. On suppose que $\alpha = 1$. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la nature de $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$.
 4. Récapituler : $I_{\alpha, \beta}$ converge si, et seulement si,
-

(*) **Exercice 20** Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$.

(**) **Exercice 21**

Par mise sous forme canonique puis changement de variable affine, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1} dt$.

(**) **Exercice 22** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f admet la limite 0 en $+\infty$.

(**) **Exercice 23** Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante, telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et que f est positive.
 2. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t) dt = 0$.
 3. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.
-

(**) **Exercice 24** À l'aide d'intégrations par parties, calculer $\int_0^1 (x \ln x)^n dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(*) **Exercice 25** Donner une primitive de $f_1 : x \mapsto e^{2x} \sin(x)$, $f_2 : x \mapsto \arctan(x)$ et $f_3 : x \mapsto \arcsin(x)$.

(***) **Exercice 26** Soit f continue et intégrable sur $[1, +\infty[$. A-t-on $\lim_{+\infty} f = 0$? a-t-on f bornée?

(***) **Exercice 27** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^4(\sin x)^2}$.

1. Vérifier que $u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (x + n\pi)^4(\sin x)^2}$.
2. Encadrer u_n à l'aide de termes de $w_n = \int_0^\pi \frac{1}{1 + (n\pi)^4(\sin x)^2} dx$.
3. Vérifier que $w_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1 + (n\pi)^4(\sin x)^2} dx$. Effectuer le changement de variables $t = \tan x$ et calculer w_n .
4. En déduire un équivalent de u_n .

5. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4 \sin^2 x} dx$ converge.

(♣) **Exercice 28** Déterminer un équivalent simple de :

$$I(x) = \int_x^1 \frac{dt}{e^t - 1} \text{ quand } x \rightarrow 0^+ \quad \text{et} \quad J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1} \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

(★★) **Exercice 29** Étudier l'intégrabilité sur $]0, 1]$ de $f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

(★★) **Exercice 30** Donner un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

(★★★) **Exercice 31** Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $f(x)$ est convergente.
 2. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0.
-

(★★★) **Exercice 32** Soit $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale définissant I .

2. Établir $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$.

3. En déduire que $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

4. En déduire que $I = \ln 2$.
-

(♣) **Exercice 33** Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On pose $u_n = \int_0^n f(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge, et que dans ce cas :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t) dt$$

2. On enlève l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Que dire ?
-

Théorème de convergence dominée

(★) **Exercice 34** (oral CCINP)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
(b) Trouver - d'une autre manière - la limite de (I_n) .

(***) **Exercice 35** (oral Mines-Télécom)

En effectuant le changement de variables $x = \frac{1}{2}(1 + \frac{t}{n})$, montrer que

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^n + (1-x)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \times \frac{2^{n-1}}{n}$$

(**) **Exercice 36** (oral Mines-Télécom)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{n+x}} dx$.

1. Justifier que l'intégrale généralisée I_n est convergente.
2. Justifier que la suite (I_n) est monotone et en déduire qu'elle converge.
3. Déterminer α réel tel que la suite $(n^\alpha I_n)$ converge vers une limite non nulle.
4. Préciser la nature des séries $\sum I_n$ et $\sum (-1)^n I_n$.

Banque épreuve orale CCINP

Intégrales : 28, 56.

Théorème de convergence dominée : 25, 26.