Feuille d'exercices n° 2 **MP**
Espaces vectoriels normés **2023-2024**

($\star$) Exercice 1 Soit (u_n) une suite vectorielle de l'espace normé E. Soit $\ell \in E$. Rappeler la définition de $u_n \to \ell$ et montrer que l'opération limite est compatible avec le passage à la norme : $u_n \to \ell \Rightarrow \|u_n\| \to \|\ell\|$.

(✍) Exercice 2
Vérifier que N définit une norme sur $E = \mathbb{R}[X]$, où $N(P) = \sup\limits_{t \in [-1,1]} |P(t)|$.

($\star$) Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = xe^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|_\infty$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$. Calculer $\|f_n\|_\infty$.

($\star$) Exercice 4 On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$. Étudier la convergence vers la fonction nulle ℓ des suites vectorielles :

1. (f_n) avec $f_n : x \mapsto x^n$
2. (g_n) avec $g_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$
3. (h_n) avec $h_n : x \mapsto nx^n$.

($\star$) Exercice 5
On admet que l'on définit deux normes sur l'espace vectoriel E des suites complexes bornées en posant :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \qquad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}}(|u_{2n}| + |u_{2n+1}|)$$

Montrer que N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

($\star$) Exercice 6
On considère $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On définit :

$$N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \qquad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

1. Justifier que $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ sont bien définies.
2. Vérifier, au choix, que N_1 ou N_2 est une norme sur E. On admet que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
3. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes à $\|.\|_\infty$?

($\star$) Exercice 7 Montrer que $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n, \mid x_1 + \dots + x_n \leqslant 1\}$ est une partie bornée et convexe de $\mathbb{R}^n$.

($\star\star$) Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}$ et E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\forall P \in E_n, \quad \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \lambda \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

($\star$) Exercice 9 Montrer que $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

($\star\star$) Exercice 10 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

1. Calculer (on détaillera) $\|A\|$ pour $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. (a) Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
   (b) Montrer que $\|A\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.
   (c) Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$.
   (d) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{k+1} - B^{k+1} = A(A^k - B^k) + (A-B)B^k$.
   (e) On pose $c = \max(\|A\|, \|B\|)$. Montrer par récurrence :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \|A^k - B^k\| \leqslant kc^{k-1}\|A-B\|$$
   (f) En déduire que si une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(A_p^k)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers A^k.

(⋆⋆) Exercice 11 On munit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ des trois normes :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \qquad N_\infty(f) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

1. Montrer que
$$N_1(f) \leqslant (b-a)\,N_\infty(f) \qquad N_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\,N_\infty(f) \qquad N_1(f) \leqslant \sqrt{b-a}\,N_2(f)$$
et montrer que chacune des ces inégalités est optimale.
2. Montrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

(⋆⋆⋆) Exercice 12 Soit $L \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ si et seulement si $L^2 = L$.

(⋆⋆) Exercice 13 u est une suite réelle.

1. Parmi les suites ci-dessous, quelles sont celles qui sont extraites d'une autre ?
$$(u_{2n}),\ (u_{3n}),\ (u_{6n}),\ (u_{3\times 2^n}),\ (u_{3\times 2^{n+1}}),\ (u_{2^n}),\ (u_{2^{n+1}})$$
2. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n).

(⋆⋆) Exercice 14 u est une suite réelle.

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Prouver que la suite u est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que (u_{2n}) converge, (u_{2n+1}) converge, mais (u_n) n'est pas convergente.
3. On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Prouver que (u_n) est convergente.

(⋆⋆⋆) Exercice 15 u est une suite réelle.

1. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ?
2. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de (u_n) ?

$\boxed{\text{Banque épreuve orale}}$

Algèbre : 61 questions 1 et 2.