Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1 **MP**
Révisions et compléments d'algèbre linéaire **2024-2025**

Calcul matriciel

($\star$) Exercice 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{Tr}(A^\top A)$. Montrer que : $\mathrm{Tr}(A^\top A) = 0 \implies A = 0$.

($\star\star$) Exercice 2 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AM) = 0$.
   Appliquer cette égalité avec M la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en ligne i et colonne j, qui vaut 1. Qu'en déduit-on ?
2. En déduire l'implication : $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)) \Longrightarrow A = B$.

($\star\star$) Exercice 3 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice *stochastique* si

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, & a_{i,j} \in [0,1] \\ \forall j \in [\![1,p]\!], & \sum\limits_{i=1}^{p} a_{i,j} = 1 \end{cases}$$

On note E_p l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ tels que : $\begin{cases} \forall i \in [\![1,p]\!], & x_i \in [0,1] \\ \sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 1 \end{cases}$

1. Dans le cas où $p = 3$, donner un exemple concret de matrice stochastique.
2. (a) Montrer que le produit d'une matrice stochastique par un vecteur de E_p appartient à E_p.
   (b) Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.
   (c) En déduire que pour M matrice stochastique, pour $n \geqslant 0$, M^n est une matrice stochastique.

($\star$) Exercice 4 Soient A et B deux matrices d'ordre n.

1. Montrer que $S = A^\top A$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que si A et B commutent, alors $A^\top$ et $B^\top$ commutent. La matrice $M = A^\top B^\top AB$ est-elle symétrique dans ce cas ?

($\star$) Exercice 5 Les questions sont indépendantes.

1. Soient A, B, C trois matrices d'ordre n. Donner l'expression du terme en ligne i et colonne j de $AB^\top$ et de ABC.
2. Calculer $p = (\mathrm{Tr}(A))^2$, $q = \mathrm{Tr}(A^2)$ et $r = \mathrm{Tr}(AA^\top)$.
3. Notons $E_{i,j}$ la matrice d'ordre n qui ne comporte que des zéros, sauf un 1 en ligne i et colonne j. Calculer $E_{i,j} \times A$ et $A \times E_{i,j}$.

($\star\star\star$) Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \geqslant 0$, on note :

$$\mathcal{T}_k^+ = \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad a_{i,j} = 0 \text{ pour } i + k > j\}$$

1. Reconnaître les ensembles $\mathcal{T}_0^+$, $\mathcal{T}_1^+$ et $\mathcal{T}_n^+$.

2. Soient k et $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{T}_k^+$ et $B \in \mathcal{T}_\ell^+$. Montrer que $AB \in \mathcal{T}_{k+\ell}^+$.
3. On dit qu'une matrice M est nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que $M^p = 0$. L'indice de nilpotence est alors le plus petit entier naturel p tel que $M^p = 0$.
   Soit T une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. Montrer que T est une matrice nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à n.
4. Montrer qu'il existe des matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires supérieures à diagonale nulle.

($\star\star\star$) **Exercice 7** On appelle matrice élémentaire $E_{i,j}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne comportant que des 0, sauf un 1 en ligne i et colonne j. Tous les indices considérés dans cet exercice sont compris entre 1 et n.

1. Montrer que $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$, où $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer (on pourra utiliser les matrices élémentaires) qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda \operatorname{Tr}$.

Déterminants

($\star$) **Exercice 8**

1. Soit ω une racine cubique de l'unité. Prouver avec un minimum de calculs que $\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$.
2. Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans développer.

($\star$) **Exercice 9** Calculer les déterminants suivants (on demande de factoriser les réponses obtenues) :

1. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

($\star$) **Exercice 10** Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$

($\star$) **Exercice 11** Calculer le déterminant de la matrice d'ordre n : $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$.

($\star\star$) **Exercice 12** Calculer $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}$ (matrice de taille n).

($\star\star$) **Exercice 13** Calculer $D_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$ (matrice de taille n).

($\star\star$) **Exercice 14** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$, et $S_0 = 0$. Calculer $\begin{vmatrix} S_1 & \dots & \dots & \dots & S_1 \\ \vdots & S_2 & \dots & \dots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix}$.

($\star$) **Exercice 15** Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = M^\top$.

1. Montrer que $\det(f) \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En déduire $\det(f)$.

($\star$) **Exercice 16** Calculer le déterminant des endomorphismes $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ lorsque :

1. $u(P) = P + P'$
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$
3. $u(P) = XP' + P(1)$

($\star\star$) **Exercice 17** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynomiale de degré au plus 1.
2. Pour a et b réels distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ réels, en déduire le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}$.

($\star\star\star$) **Exercice 18** Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ où $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On pose $S = D - CA^{-1}B$. Montrer que $\det(M) = \det(A)\,\det(S)$.

($\star\star$) **Exercice 19** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{pmatrix}$. On admet que f_A est un endomorphisme.

1. On prend $n = 2$. Trouver la matrice de f_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Reconnaître, ou bien faire apparaître, une matrice par blocs. Vérifier que $\det(f_A) = (\det(A))^2$.
2. Généraliser pour n quelconque.

($\star\star\star$) **Exercice 20** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ où $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^{n-2}\, A$.

($\star\star$) **Exercice 21** Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer $\det(xI_n - C)$ pour $x \in \mathbb{K}$.

(⋆⋆) **Exercice 22** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ et $\sigma = ab + bc + ac$. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

1. Calculer $AA^\top$.
2. Montrer que $|\sigma| \leqslant 1$ puis que $|\det(A)| \leqslant 1$.

(⋆⋆⋆) **Exercice 23** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étudier le rang de Com(A) en fonction du rang de A. On distinguera 3 cas : $\mathrm{rg}(A) = n$, $\mathrm{rg}(A) < n - 1$ et enfin, $\mathrm{rg}(A) = n - 1$.

Espaces vectoriels et applications linéaires

(⋆) **Exercice 24** Pour u endomorphisme de E, montrer que $F = \{x \in E, \mid u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(⋆) **Exercice 25** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, a], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0, a] \text{ et } f(0) = f(a) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $D : F \to E$, $f \mapsto f''$. Déterminer le noyau et l'image de D.

(⋆) **Exercice 26** Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n + u_{n+2} = 2a\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $\psi : u \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que (r, s, t) est une base de E, où :

$$r_n = 1, \qquad s_n = \cos(\frac{n\pi}{2}), \qquad t_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$$

(⋆) **Exercice 27** Montrer que la famille $(X^k(1 - X)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(⋆⋆) **Exercice 28** Montrer que les familles suivantes sont des familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_1 = (x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \mathcal{F}_2 = (x \mapsto e^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$$

(⋆⋆) **Exercice 29** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On suppose qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $(x, u(x))$ est libre. Aboutir à une contradiction.
2. Retrouver cette contradiction directement sur $u^2 = -\mathrm{Id}_E$ en utilisant le déterminant.

(⋆⋆) **Exercice 30** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que : $\ker(g \circ f) = \ker f \iff \ker g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.
2. Montrer que : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g \iff \ker g + \mathrm{Im}\, f = E$.

(⋆) **Exercice 31** Soient E un espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n$.

1. Montrer que $\ker g = \mathrm{Im}\, f$.
2. Que peut-on en déduire concernant $g \circ f$?
3. Montrer que f et g sont des projecteurs.

($\star$) **Exercice 32** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel suivant :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) + P'(0) + \frac{P''(0)}{2!} + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} = 0\}$$

Donner une base de F.

($\star\star$) **Exercice 33** Parmi les matrices suivantes, figure-t-il des matrices semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

($\star$) **Exercice 34**

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère : $F_a = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, P(a) = 0\}$. Montrer que F_a est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.
2. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des réels deux à deux distincts. Montrer que $F = \bigcap_{i=1}^{p} F_{a_i}$ est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.

($\star\star$) **Exercice 35** Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $f^k = 0$ (on dit que f est nilpotent).

1. Montrer que f n'est pas bijective.
2. Soit p le plus petit entier naturel non nul tel que $f^p = 0$. Ainsi f^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul, et il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   (a) Montrer que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre de E.
   (b) En déduire que $p \leqslant n$.

($\star\star$) **Exercice 36** Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $a \neq 0$ tel que la famille $(u(a), u^2(a), \ldots, u^n(a))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est un automorphisme de E.
2. En déduire que la famille $(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est une base de E.
3. Montrer qu'il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que :

$$u^n(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 u(a) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(a)$$

4. Montrer finalement que

$$u^n = \alpha_0 \operatorname{Id} + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$$

($\star\star$) **Exercice 37**
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et H_1 et H_2 deux hyperplans de E tels que $H_1 \neq H_2$.

1. On rappelle que pour F et G sous-espaces vectoriels de E, on a :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

   En déduire que $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2$.
2. Montrer que la dimension de $H_1 \cap H_2$ est $n - 2$.

($\star$) **Exercice 38** Soit f un endomorphisme de E de matrice dans la base $\mathcal{B}$ de E égale à $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1 + X, X^2, -1 - X^2)$
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de E.

($\star\star\star$) **Exercice 39**

Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, d'un endomorphisme f.

1. Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^3$ tels que f soit la projection sur F de direction E. Déterminer E et F.
2. Trouver trois vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^3$ tels que :
   - (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$
   - la matrice de f dans cette base soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer la matrice de la projection sur E, de direction F, dans la base (u, v, w).

($\star$) **Exercice 40**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application f définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = X[nP(X) - XP'(X)]$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer $f(1)$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer $f(X^k)$.
3. Montrer alors que f est un endomorphisme.
4. En reprenant les résultats de 2., donner clairement la matrice A de f dans la base canonique de E.
5. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
6. Déterminer une base de $\ker f$.

($\star\star$) **Exercice 41** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer une base de $\ker f$ dans les cas suivants, après avoir visualisé clairement la matrice A.

1. A est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
2. Tous les coefficients de A sont nuls hormis les coefficients $a_{i,i-1}$, pour $i \in [\![2, n]\!]$.
3. Tous les coefficients de A sont nuls hormis les coefficients $a_{i,i+2}$, pour $i \in [\![1, n-2]\!]$.
4. A a des 1 en sous-diagonale et en sur-diagonale et des 0 ailleurs.

($\star\star$) **Exercice 42** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer une base de $\ker f$ dans les cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. A est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

($\star\star$) Exercice 43 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice d'ordre n suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En permutant les vecteurs de la base canonique, trouver une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est $A^\top$.

($\star$) Exercice 44 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ associe le polynôme $f(P)$ donné par

$$a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$$

Montrer de 4 façons différentes que f est un automorphisme.

($\star$) Exercice 45 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit $g = \Phi(f)$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Rappeler ce qu'est la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ par rapport à f. Que sait-on alors de cette fonction ?
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
3. Montrer que Φ est injectif mais pas surjectif.

($\star$) Exercice 46

1. Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, et de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f^4 = 0$ et $f^3 \neq 0$. Montrer que f n'est pas injectif.
2. Même question mais en enlevant l'hypothèse « E est de dimension finie ».

($\star\star$) Exercice 47 Soit Φ l'application qui à toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ associe l'application $\Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(f)(x) = \int_x^{3x} f(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$).
2. Φ est-elle surjective ?
3. (a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3} f(\frac{x}{3})$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^n f\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

Montrer alors que f est la fonction nulle.

(b) En déduire que $\ker \Phi = \{0\}$.

($\star$) Exercice 48 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \ker f \neq \{0\}$.
2. Calculer A^2 et A^3. En déduire le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p) = \mathbb{R}^4$.

($\star$) Exercice 49 Montrer que $F = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $G = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ et $H = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ ne vérifient pas $F \oplus G \oplus H = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

($\star$) Exercice 50 $F = \operatorname{Vect}(3X - 1)$, $G = \operatorname{Vect}(X^2, 1)$ et $H = \operatorname{Vect}(X^3 + 7)$.
Montrer que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[X]$.

($\star$) Exercice 51 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner un exemple d'écriture de $\mathbb{R}_p[X]$ comme somme directe :

1. de deux espaces vectoriels,
2. de $p + 1$ espaces vectoriels,
3. de p espaces vectoriels.

($\star$) Exercice 52 Soient n un entier supérieur ou égal à 3, a et b deux réels distincts et $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On note :

$$F_a = \{P \in E \,|\, P(a) = 0\} \quad F_b = \{P \in E \,|\, P(b) = 0\} \quad F = \{P \in E \,|\, P(a) = 0 = P(b)\}$$

1. Montrer que F_a, F_b et F sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que la famille $(X - a,\ X(X - a),\ X^2(X - a), \dots, X^{n-2}(X - a))$ est une base de F_a.
3. Donner une base de F.
4. Soit u l'application linéaire de E dans E définie par $u(P)(X) = P(a)X + P(b)$. Donner $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$.
5. Montrer que $E = F_a + F_b$. La somme est-elle directe ?

($\star\star$) Exercice 53 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$\operatorname{Im} f + \ker f = E \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f^2)$$

($\star\star$) Exercice 54 Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^2 + 3f = 0$.
Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$:

- lorsque E est de dimension finie
- par analyse - synthèse dans le cas général.

($\star\star$) Exercice 55 Soit $f : E \to E$ une application linéaire telle que $f^2 + 3f - 4\operatorname{Id}_E = 0$.
Montrer que $\ker(f - \operatorname{Id}_E) \oplus \ker(f + 4\operatorname{Id}_E) = E$.

($\star\star$) Exercice 56 Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant :

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$

Montrer que $\quad E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.

($\star$) Exercice 57 $\quad E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in E \,|\, x + y = z + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E \,|\, x = t = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Déterminer la matrice A et la matrice B, relativement à la base canonique de E, de la projection sur F parallèlement à G, et de la projection sur G parallèlement à F.

($\star$) Exercice 58 $\quad$ Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E. Montrer que pour tout x de E, $\operatorname{Vect}(x, p(x))$ est stable par p.

($\star$) Exercice 59 $\quad$ Soient f un endomorphisme de E, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E stables par f. Montrer que $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$ sont stables par f.

($\star\star$) Exercice 60
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ -2x + y + z = 0\}$.

1. Déterminer une base (v_1, v_2) de P et vérifier que P est un plan stable par f.
2. Déterminer un supplémentaire $\operatorname{Vect} < v_3 >$ de P et donner la matrice B de f dans la base (v_1, v_2, v_3).
3. Déterminer alors un supplémentaire $\operatorname{Vect} < v_4 >$ de P stable par f. Donner la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_4).

($\star\star$) Exercice 61 $\quad$ Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et q un projecteur de E. Montrer que F est stable par q si et seulement si $F = (F \cap \ker q) \oplus (F \cap \operatorname{Im} q)$.

($\star$) Exercice 62 $\quad$ Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et G l'ensemble des suites géométriques de raison 2. Soit Δ l'application qui à une suite u associe la suite w définie par $w_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que Δ est une application linéaire.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que G est stable par Δ.

($\star$) Exercice 63 $\quad$ Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est stable par g.

($\star$) Exercice 64 $\quad$ Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Donner l'allure de la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ dans les cas suivants :

1. $\operatorname{Vect}(b_1)$ est stable par f.
2. $\operatorname{Vect}(b_1)$ est stable par f et $\operatorname{Vect}(b_2, b_3, \ldots, b_n)$ est stable par f.
3. pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Vect}(b_k)$ est stable par f.
4. pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Vect}(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ est stable par f.

($\star\star$) Exercice 65 $\quad$ Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On suppose enfin que $E = \operatorname{Im} u + F$.

Montrer que $F = E$.

($\star$) **Exercice 66** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et p un projecteur de E. En utilisant la matrice de p dans une base bien choisie, montrer le rang de p est égal à sa trace.

($\star\star$) **Exercice 67** (oral HEC)
Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $3n$.
Soit f un endomorphisme de rang $2n$ et g la restriction de f au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f^2$ et $\ker g = \ker f \cap \operatorname{Im} f$.
2. On note $\operatorname{rg}(f^2)$ le rang de f^2. Déduire de la question précédente que $\operatorname{rg}(f^2) \geqslant n$.

($\star\star\star$) **Exercice 68** Préliminaire : pour f et g endomorphismes de E, quelles inclusions pouvez-vous montrer concernant :

$$\ker f, \quad \ker g, \quad \ker f \circ g, \quad \operatorname{Im} f, \quad \operatorname{Im} g, \quad \operatorname{Im} f \circ g \qquad ?$$

E, F, G sont trois espaces vectoriels de dimension finie. $u \in L(E,F)$ et $w \in L(F,G)$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(w \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(w))$.
2. Soit φ la restriction de w à $\operatorname{Im} u$.
   (a) Montrer que $\ker \varphi = \ker w \cap \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im}(w \circ u)$.
   (b) En déduire que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(w) - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(w \circ u)$.

(☕) **Exercice 69** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$. On suppose que f laisse stable toutes les droites vectorielles.

1. Qu'est-ce qu'une droite vectorielle ?
2. Montrer que pour tout x vecteur non nul de E, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
3. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. En considérant $f(x+y)$, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
4. Montrer que f est une homothétie.

($\star\star$) **Exercice 70** (oral HEC) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E.
Montrer que p et u commutent si et seulement si $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u.

Banque épreuve orale CCINP

Algèbre : 59 questions 1 et 2, 60, 64, 71, 87, 90.
