Feuille d'exercices n° 1 **MP**
Intégrales sur un intervalle quelconque **2023-2024**

(⋆) Exercice 1

On donne ici la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

1. En déduire sans calcul la valeur de $J = \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.
2. À l'aide de changements affines, calculer alors $K = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et $L = \int_{0}^{+\infty} e^{-25x^2}\,\mathrm{d}x$.

(⋆) Exercice 2

À l'aide de changements de variables affines, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(t-1)^2}\,\mathrm{d}t \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{25+t^2}\,\mathrm{d}t \quad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$$

(⋆) Exercice 3

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \ln\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x$$

$$I_7 = \int_{-\infty}^{0} e^x \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{ax}}\,\mathrm{d}x$$

(⋆) Exercice 4

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1-e^t+a\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, a étant un paramètre réel.

(⋆) Exercice 5

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,\mathrm{d}x$ converge. La calculer en faisant le changement de variable $u=\sqrt{x}$.

(⋆⋆) Exercice 6

Montrer que les intégrales I et J convergent et sont égales, où $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

(⋆⋆) Exercice 7

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes (α et β sont des réels) :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t(1+\sqrt{t})}\,\mathrm{d}t\,, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t\,, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

(⋆) Exercice 8

1. Décomposition en éléments simples. Trouver a, b, c réels tels que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, on ait :

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$$

2. Les intégrales suivantes convergent-elles ? Si oui, donner leur valeur.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$$

(⋆) Exercice 9

Soit $f : t \mapsto \dfrac{t \sin t}{t^2+1}$. On considère : $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Pour x réel, on introduit $I(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que

$$I(x) = -\frac{x \cos x}{1+x^2} + \int_0^x \frac{(1-t^2)\cos t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

   (b) En déduire que l'intégrale I_1 est une intégrale convergente.

2. Pour x réel et $k \in \mathbb{N}$, on introduit $J(x) = \displaystyle\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{t|\sin t|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   (b) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{(t+k\pi)\sin t}{(t+k\pi)^2+1}\mathrm{d}t$. En déduire que $u_k \geqslant \dfrac{2k\pi}{[(k+1)\pi]^2+1}$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2k\pi}{[(k+1)\pi]^2+1} = +\infty$.

   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J(n\pi) = +\infty$.

   (e) En déduire que l'intégrale I_2 est une intégrale divergente.

3. En rapport avec la propriété de convergence absolue du cours, que montre cet exercice ?

(⋆⋆) Exercice 10

1. Par décomposition en éléments simples, montrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer (*réponse :* $I = \frac{\ln 2}{2}$).

2. En déduire que $J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

(⋆) Exercice 11
Déterminer la nature des intégrales :

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int\limits_0^{+\infty} \sin(t)\ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

(⋆) Exercice 12

Montrer que l'intégrale $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et la calculer avec le changement de variables $u = \frac{1}{t}$.

(⋆⋆) Exercice 13

Soit $\alpha \in]0,1]$. Étudier la convergence de $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Pourquoi en déduit-on la convergence de $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$?

(⋆⋆) Exercice 14 ✎ Montrer que si f et g sont de carré intégrable, alors fg est intégrable.

(⋆) Exercice 15 Calculer $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$:

— par primitive usuelle,

— par changement de variable $u = \sin t$.

(⋆) Exercice 16 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$
2. $\int\limits_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$
3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$
4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$
5. $\int\limits_0^{+\infty} \sin(\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t$

(⋆⋆) Exercice 17 Étudier l'intégrabilité des fonctions sur les intervalles considérés :

1. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[1,+\infty[$
2. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ sur $]0,1]$
3. $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ sur $]0,1[$.

(⋆⋆) Exercice 18 Représenter dans un repère orthonormé du plan l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) pour lesquels l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(t-1)^y}$ converge.

(⋆⋆) Exercice 19 Intégrales de Bertrand. Pour α et β réels, on étudie la nature de l'intégrale

$$I_{\alpha,\beta} = \int\limits_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$$

1. On suppose que $\alpha < 1$. En utilisant la limite quand t tend vers $+\infty$ de $t\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, donner la nature de $I_{\alpha,\beta}$.
2. On suppose que $\alpha > 1$. Montrer que l'intégrale étudiée converge.
3. On suppose que $\alpha = 1$. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la nature de $\int\limits_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.
4. Récapituler : $I_{\alpha,\beta}$ converge si, et seulement si, ...

(⋆) **Exercice 20** Existence et calcul de $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$.

(⋆⋆) **Exercice 21**

Par mise sous forme canonique puis changement de variable affine, calculer $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$.

(⋆⋆) **Exercice 22** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f admet la limite 0 en $+\infty$.

(⋆⋆) **Exercice 23** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et décroissante, telle que $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que f est positive.
2. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{x})$.

(⋆⋆) **Exercice 24** À l'aide d'intégrations par parties, calculer $\int\limits_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(⋆) **Exercice 25** Donner une primitive de $f_1 : x \mapsto e^{2x}\sin(x)$, $f_2 : x \mapsto \arctan(x)$ et $f_3 : x \mapsto \arcsin(x)$.

(⋆⋆⋆) **Exercice 26** Soit f continue et intégrable sur $[1, +\infty[$. A-t-on $\lim\limits_{+\infty} f = 0$? a-t-on f bornée ?

(⋆⋆) **Exercice 27** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^4(\sin x)^2}$.

1. Vérifier que $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (x+n\pi)^4(\sin x)^2}$.
2. Encadrer u_n à l'aide de termes de $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + (n\pi)^4(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Vérifier que $w_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1 + (n\pi)^4(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$. Effectuer le changement de variables $t = \tan x$ et calculer w_n.
4. En déduire un équivalent de u_n.

5. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ converge.

(✍) Exercice 28 Déterminer un équivalent simple de :

$$I(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t - 1} \text{ quand } x \to 0^+ \qquad \text{et} \qquad J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} \text{ quand } x \to +\infty$$

(⋆⋆) Exercice 29 Étudier l'intégrabilité sur $]0,1]$ de $f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(⋆⋆) Exercice 30 Donner un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(⋆⋆⋆) Exercice 31 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $f(x)$ est convergente.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0.

(⋆⋆⋆) Exercice 32 Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale définissant I.
2. Établir $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire que $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.
4. En déduire que $I = \ln 2$.

(⋆⋆⋆) Exercice 33 Banque Mines-Ponts 2021 PSI

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On pose $u_n = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge, et que dans ce cas :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. On enlève l'hypothèse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Que dire ?

Banque épreuve orale

Analyse : 25 question 1 uniquement, 26 questions 1 et 2.a., 28, 56.
