Feuille d'exercices n° 0 **MP**
Remise en route **2023-2024**

Intégration de fonctions rationnelles

($\star$) **Exercice 1** Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

$$\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\mathrm{d}t \qquad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5}\mathrm{d}t$$

Réponses $\frac{3}{2}+\ln(3)-\ln(2)$ *et* $-\frac{1}{48}+\frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}$

($\star$) **Exercice 2** Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\mathrm{d}t$. *Réponse* $\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)$.

($\star$) **Exercice 3** Pour $a \neq 0$, calculer la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$. Quelle primitive en déduit-on ?

($\star\star$) **Exercice 4** Mettre sous forme canonique x^2+x+1 et en déduire $\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$. *Réponse* $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

($\star\star$) **Exercice 5** À l'aide éventuellement d'une décomposition en éléments simples, calculer :

1. $\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\mathrm{d}t$
2. $\int_0^1 \frac{t-1}{t+1}\mathrm{d}t$
3. $\int_0^1 \frac{t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t$
4. $\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\mathrm{d}t$
5. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t$

Réponses dans le désordre : $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$, $1-2\ln 2$, $\frac{1}{3}\left(\ln(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$, $\ln 2-\frac{1}{2}$ et $\ln\frac{1}{3}$.

Limites, développements limités, asymptotiques

($\star$) **Exercice 6**
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

($\star$) **Exercice 7**
Pour a et b réels, calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)-\sin(bx)}{x^2}$.

($\star$) **Exercice 8**
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(3x)-\ln(1+x)}{\mathrm{sh}(3x)-\sin(3x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\tan x} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$$

($\star$) **Exercice 9** Donner les développements limités demandés.

1. DL_2 en 0 de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$
2. DL_4 en 0 de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$
3. DL_3 en 0 de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$
4. DL_2 en 1 de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

($\star\star$) **Exercice 10** Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

1. À l'ordre 4 : $\sin(x) + 2\ln(1+x)$ *Réponse* $3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$
2. À l'ordre 4 : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ *Réponse* $x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$
3. À l'ordre 6 : $\sin(x)(\mathrm{ch}(x) - 1)$ *Réponse* $\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^5}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$
4. À l'ordre 2, en 1 : $\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ *Réponse* $1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\left((x-1)^2\right)$
5. À l'ordre 4, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$ *Réponse* $1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

($\star\star$) **Exercice 11** Former le développement asymptotique, à la précision et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

1. À la précision $\dfrac{1}{x^2}$, en $+\infty$:
   $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
2. À la précision $\dfrac{1}{x^3}$, en $+\infty$:
   $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$. *Réponse* $-\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$
3. À la précision $\dfrac{1}{x^5}$, en $+\infty$:
   $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$. *Réponse* $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{5}{6x^4} - \dfrac{5}{6x^5} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^5}\right)$
4. À la précision x (plus facile) ou x^2 (plus difficile), en 0 :
   $\dfrac{1}{x(e^x-1)} - \dfrac{1}{x^2}$. *Réponses* $-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{12} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$ et $-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{720}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

Bonus

($\star$) **Exercice 12** Extrait B.E.O. n° 1
Donner le signe au voisinage de $+\infty$ de $u_n = \mathrm{sh}(\dfrac{1}{n}) - \tan(\dfrac{1}{n})$.

($\star$) **Exercice 13** Extrait B.E.0. n° 56
Montrer que la fonction u admet une limite finie en 1 où

$$u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$$

On trouvera la limite $\frac{1}{2}$.
