Entraînement **MP**
Développements en séries entières **2024-2025**

Problème

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On rappelle le théorème suivant :
Si une fonction admet un développement en série entière sur l'intervalle $I =]-r, r[$ $(r > 0)$alors :

— la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$,

— son développement en série entière est unique et donné par la série de Taylor de f à l'origine :

$$\text{pour tout réel } x \in]-a, a[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et pour } x \neq 0,\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

   Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Expliciter une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, l'égalité $f^{(n)}(0) = n.n!$

3. Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

   On suppose que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

   (a) Montrer que la série $\sum f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

   (b) À l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$, montrer que f est la fonction nulle sur $[0, 1]$.

   (c) Montrer que f est la fonction nulle sur $]-R, R[$.

II. Contre-exemples

4. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.

5. **Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0.**
   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x \neq 0,\ f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ et } f(0) = 0$$

(a) Par les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-\frac{1}{x^2})$$

(b) Démontrer alors, toujours par récurrence, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
Par parité, f est ainsi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

6. **Un exemple où la série de Taylor de f en 0 a un rayon nul.**
On pose, pour x réel,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2} \, \mathrm{d}t$$

(a) Montrer que, pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

(b) *Question pour les 5/2 uniquement.* Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On admet que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient ses dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

(c) Pour $t \in]0,+\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

(d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$? La fonction f est-elle développable en série entière à l'origine ?

III. Condition suffisante

On se propose, dans cette partie, d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

7. Soit $a > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout réel $x \in]-a,a[$ et pour tout entier naturel n, $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$.

(a) Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0.

(b) Donner un exemple simple de fonction, autre qu'une fonction constante, pour laquelle ce résultat s'applique.
