
Exercice 1

On se propose, entre autres, de montrer l'existence de $C = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $S = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} |\sin(t^2)|\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$. Que peut-on en déduire concernant la série numérique $\sum u_n$?
   (c) Montrer alors que la fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit la fonction à valeurs complexes $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{e^{\mathrm{i}x^2} - 1}{x^2}$.
   (a) Établir que f se prolonge par continuité en 0 par une valeur qu'on précisera.
   (b) Montrer que la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x^2} - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

3. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - e^{\mathrm{i}t^2}}{t} = 0$.
   (b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \exp(\mathrm{i}t^2)\,\mathrm{d}t$ converge et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $I = \lambda \int_0^{+\infty} \exp(\mathrm{i}t^2)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire la convergence des intégrales C et S.
