
Exercice 1 : séries

1. Montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a :

$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$$

2. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{1/k} \in]0,1[$$

   (b) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$?

   (c) Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{1/k}) \quad \text{et} \quad u_n = \exp V_n$$

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. (a) Montrer que :

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \Big[\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})\Big]$$

   (b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\dfrac{1}{k})$.

   (c) En déduire qu'il existe $K>0$ tel que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\dfrac{K}{n}$.
   Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 2

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. On désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ et par λ un réel strictement positif.
   Montrer que : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

2. (a) Rappeler la formule donnant $\cos(a+b)$ pour a et b réels.
   Exprimer, pour tout réel t et tout entier k, $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.

   (b) En déduire que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

   (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}$.

3. Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 3 : intégrales généralisées

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \, \mathrm{d}x$ et $w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \, \mathrm{d}x$.
   (a) Montrer, à l'aide du théorème de convergence dominée, que la suite (w_n) est convergente.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \frac{1}{e} \ln(n+1)$.
   (c) Donner la limite de la suite (u_n).
3. On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   (a) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.
   (b) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \, \mathrm{d}x \leqslant I$.
   (c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Exercice 4 : intégrales généralisées

n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit f une fonction définie sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, continue, décroissante, et intégrable sur $]0,1]$.
   On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.
   (a) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer :
   $$\frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant S_n \leqslant \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$$
   (b) En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Quel résultat du cours apporte un résultat similaire, sous d'autres hypothèses (à préciser) ?
2. (a) Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^{3/2}} \, \mathrm{d}u$.
   (b) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = -\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$.
3. On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$. À l'aide de tout l'exercice, déterminer la limite de P_n.
