Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme :

$$f(P) = P'' - 4XP'$$

1. **Étude de f**
   Soit n un entier naturel, fixé uniquement dans cette question.
   (a) Justifier que f est un endormorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer $f(1)$, $f(X)$, puis $f(X^k)$ pour $k \in \{2, \dots, n\}$.
   Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.
   (c) Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.
   (d) Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
   Établir que : $\lambda = -4\deg(P)$.
   En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que

$$(\mathcal{E}_n) : \quad f(H_n) = -4nH_n$$

2. **Étude de la suite** $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) En dérivant la relation $\mathcal{E}_n$, démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad f(H_n') = -4(n-1)H_n'$$

   En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad H_n' = nH_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{n-1}{4}H_{n-2} = 0$$

   (b) Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$? Calculer alors H_2 et H_3.
   (c) D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{n-1}{4}u_{n-2}$$

   Écrire un programme en `Python` calculant u_{201}.

Exercice 2

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note Tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbf{R}$. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
   (b) Établir que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.

2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f.

(c) Montrer que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont la trace est nulle.
On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g. g est-il diagonalisable ?

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier l'existence et les propriétés des polynômes P_n tels que :

$$\forall t \in \mathbb{C} - \{0\},\ P_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n} \tag{1}$$

1. (a) Montrer que si P_n existe alors P_n est unique.
   (b) Justifier que $P_0(X) = 2$. Justifier que $P_1(X) = X$. En développant $(t + \frac{1}{t})^2$, calculer $P_2(X)$ vérifiant la relation (1).

2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$ existe et

$$P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X) \tag{2}$$

3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant égal à 1.
   (b) Étudier la parité de P_n.

4. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer un complexe non nul t tel que $t + \dfrac{1}{t} = 2\cos\theta$ (*il y a une solution évidente...*). Calculer alors $P_n(2\cos\theta)$ en fonction de n et θ.
   (b) En déduire les racines de P_n en fonction de n et une factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

5. (a) Calculer $P_5(X)$.
   (b) En déduire une factorisation de $P_5(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) En comparant cette factorisation et celle obtenue en 4.b., donner les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{\pi}{10})$ et $\cos(\dfrac{3\pi}{10})$.
