Entraînement **MP**
Fonctions génératrices **2024-2025**

Problème (extrait CCINP PSI 2024)

File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0 , la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1 .
   Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$.
2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
   Exprimer A en fonction des événements $[T_1 = k], k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Interpréter.
3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.
4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.
   On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
   Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.
6. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^a$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
   En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - étude du comportement de la file

II. 1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = f(z_n)$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.
8. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.
9. Soit la fonction $\psi : \left\{ \begin{array}{l}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{array} \right.$.
   Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.
10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
    Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \to 1$.
11. On suppose dans cette question que $a > 1$.
    Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.

II. 2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0 .
On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0 . Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées indépendantes.
On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.
Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.
Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.
Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $[V_k = 0]$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} [V_n = 0]$?
13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1,n]\!]$?
14. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}_{(S=n)}(V_1 = k)$.
    En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre
15. On note $z_n = \mathbb{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbb{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.
16. Justifier que pour tout $(j,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}_{(V_1=j)}(V_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.
17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.
18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in N}$. Interpréter.

Exercice (extrait adapté de BECEAS 2024)

Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note $G_X$sa fonction génératrice, définie pour $t \in \mathbb{R}$, lorsque la série converge, par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$$

1. L'exercice commençait par démontrer la propriété relative à la fonction génératrice de $X + Y$ lorsque X et Y sont indépendantes. Quelle est cette propriété ? Comment se généralise-t-elle à n variables aléatoires ?
2. On veut montrer qu'il n'est pas possible de construire un dé faussé à 6 faces (numérotées de 1 à 6) tel que si on le lance deux fois, la somme des deux résultats obtenus suive une loi uniforme sur $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$.
   (a) Soit U la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$. Déterminer sa fonction génératrice G_U et déterminer les ordres de multiplicité des racines de G_U dans $\mathbb{C}$.
   (b) Supposons que l'on ait un dé à 6 faces tel que la probabilité d'apparition de la face $i \in \{1, \dots, 6\}$ soit égale à p_i, avec $p_i \in]0, 1[$. On le lance deux fois. Soit X_1 la variable aléatoire égale au numéro obtenu au premier lancer. Montrer que G_{X_1} admet une racine non nulle dans $\mathbb{C}$.
   (c) Conclure.
3. Un commerçant reçoit dans son magasin N clients par jour, où N est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Chaque client repart avec un produit avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On supposera que les comportements des clients sont indépendants, et indépendants de N. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de produits vendus par jour. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième client achète un produit} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, de sorte que :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega) \text{ ou encore } Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

   Si $Y(\omega) = 0$, il est convenu (convention usuelle sur les sommes) que la somme précédente vaut 0.
   (a) Préciser la fonction génératrice d'une loi de Poisson (on notera λ le paramètre).
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n)$.
   (c) En déduire que pour tout $t \in [0, 1]$, $G_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} G_{X_1+X_2+\cdots+X_k}(t)P(N = k)$ puis que $G_Y(t) = G_N(G_{X_1}(t))$.
   (d) Déterminer finalement la fonction génératrice de Y sur $[0, 1]$ et en déduire que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
