
Exercice 1

Préliminaire : *(facultatif)* Montrer que $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note N la norme associée à ce produit scalaire. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de prouver que N est sous-multiplicative :

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B)$$

1. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$P^\top (A^\top A)P = D$$
où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.
On notera par la suite λ_i le coefficient $d_{i,i}$ de la matrice $D = (d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
2. Soit λ une valeur propre de $A^\top A$ et X un vecteur propre associé.
En calculant $X^\top A^\top AX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.
3. On pose $S = P^\top (BB^\top)P = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que
$$[N(A)]^2 = \mathrm{Tr}(D), \quad [N(B)]^2 = \mathrm{Tr}(S), \quad [N(AB)]^2 = \mathrm{Tr}(SD)$$
4. Montrer que : $\quad \mathrm{Tr}(SD) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i}$.
5. On note E_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que :
$$E_i{}^\top SE_i = \|B^\top PE_i\|^2$$
où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer $E_i{}^\top SE_i$ en fonction des coefficients de S.
Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de $s_{i,i}$?
6. Montrer que : $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} s_{i,i}\Big)$
puis conclure que : $\quad N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la matrice transposée de la matrice A.

1. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.
2. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.
On pourra étudier le signe de $Y^\top BY$ pour un vecteur Y de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que l'on a : $A = 3\left(A^\top\right)^2 - A^\top - I_n$.
4. En déduire que le polynôme $P(X) = \left(3X^2 - X - 1\right)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A.
5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.
6. Factoriser P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

7. La matrice A est-elle inversible ?
8. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.
9. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Montrer que V est aussi vecteur propre de $A^\top$.
10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.
On appelle $\mathscr{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associés à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2, \quad L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{(symbole de Kronecker).}$$

   (a) Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Vérifier que $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (c) Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base $\mathscr{L}$.

11. **Étude des puissances de A**
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
      i. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base $\mathscr{L}$.
      ii. En déduire une expression de A^k.
   (b) Démontrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.
   Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.
