
Exercice 3 de e3a 2021

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \frac{1}{2-t}$.
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X .
 2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.
 3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y .
 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$.
 5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}(S = n)$.
 6. **Calculs d'espérances et de variances.**
 - (a) Justifier que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
 - (b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
 - (c) Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y - 1)$.
 - (d) En déduire la variance de la variable aléatoire Y .
 - (e) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S .
-