$E = \{$suites réelles convergentes$\}$

$F_1 = \{$suites de limite égale à $0\}$ et $F_2 = \{$suites constantes$\}$

À montrer : $F_1 \oplus F_2 = E$
autrement dit : $\forall u$ suite de $E$, $\exists (a, b) \in F_1 \times F_2 /$
$u = a + b$

ANALYSE. Soit $u \in E$ telle que $u = a + b$ avec $(a, b) \in F_1 \times F_2$

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + b_n = u_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; b_n = b_0 \quad (\text{suite constante}) \\ \lim\limits_{p \to +\infty} a_p = 0 \text{ donc } \lim\limits_{p \to +\infty} u_p = b_0 \end{cases}$$

Donc $b$ est unique, donnée par $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lim\limits_{p \to +\infty} u_p$

et $a$ est unique, donnée par $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n - \lim\limits_{p \to +\infty} u_p$

SYNTHÈSE Soit $u \in E$. On note $\ell = \lim\limits_{p \to +\infty} u_p$.
On pose $b_n = \ell$ et $a_n = u_n - \ell$

On a bien : $b$ suite constante ; $a$ suite de limite nulle
et $\forall n$, $a_n + b_n = u_n$.

Je vous laisse conclure.