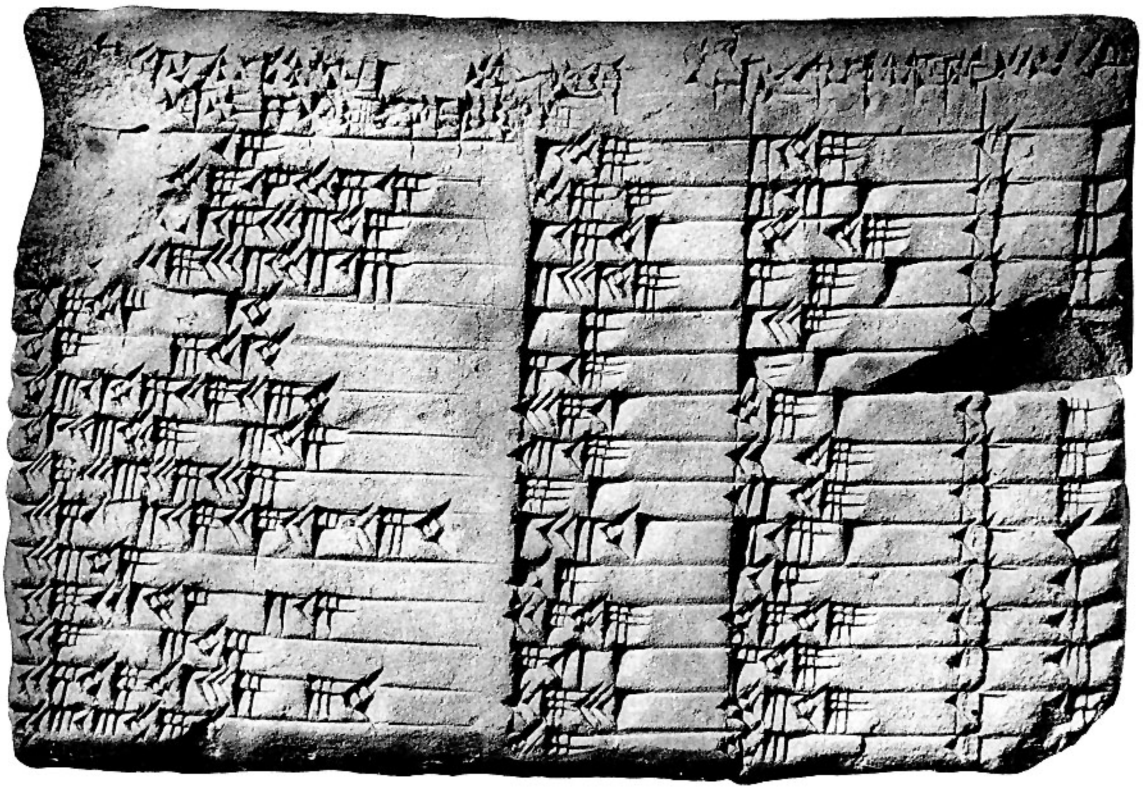
Extrait du cahier de calcul

— Algèbre linéaire, matrices, déterminants —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version 11 — 23 juin 2022

Énoncés

Fiche de calcul n° 1

025A

Calcul matriciel

Prérequis

Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

Calcul matriciel

Calcul 1.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 . . .

b) A^3 . . .

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 . . .

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 1.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) A^k ...

d) B^2 ...

e) B^3 ...

f) B^k ...

g) C^2 ...

h) C^3 ...

i) C^k ...

j) D^2 ...

k) D^3 ...

l) D^k ...

Calcul 1.3 — Calculs avec des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \qquad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \qquad c_{ij} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice (i,j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

On rappelle que $\binom{i}{j} = 0$ quand $j > i$.

a) $A \times B$ ....

b) B^2 ....

c) $B^\top \times B$ ....

d) $A \times C$ ....

Calcul 1.4 — Deux calculs plus difficiles.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a) $\left[A^2\right]_{i,j}$ ....

b) $\left[C^2\right]_{i,j}$ ....

Inversion de matrices

Calcul 1.5 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A ...

d) D ...

g) G ...

b) B ...

e) E ...

h) H ..

c) C ...

f) F ...

i) J ...

Calcul 1.6 — Matrices dépendant d'un paramètre.

Soit λ un paramètre réel. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible . .

b) Inverse de A . . .

c) CNS pour B inversible . .

d) Inverse de B . . .

Réponses mélangées

$$\frac{1}{2(\pi-e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2^k & 3^k-2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad n^{k-1}D \qquad \begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Non inversible !} \qquad 2^{i-j}\binom{i-1}{j-1} \qquad \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \neq 1 \qquad \frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad 17 \text{ (matrice } 1\times 1)$$

$$\frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &(1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1}+\delta_{i,j}) \\ &+(1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j-1}) \end{aligned}$$

$$2\times 3^{j-i}\times 5^{i-1} \qquad \binom{i-1}{j}+\binom{i-1}{j-2} \qquad \begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2^{i+1}3^{j-i}(2^n-1) \qquad \lambda \neq 1 \qquad \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad 2\times 3^{i+j}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$$

► Réponses et corrigés page 15

Fiche de calcul n° 2

0026A

Algèbre linéaire

Prérequis
Coordonnées. Applications linéaires. Matrices. Rang.

Vecteurs

Calcul 2.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1),(-1,2)\big)$. ....

b) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((-1,2),(0,1)\big)$. ....

c) $u = (3,4)$, $\mathcal{B} = \big((1,2),(12,13)\big)$. ....

d) $u = (1,2,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1,3),(4,5,6),(-1,0,1)\big)$. ....

e) $u = (-1,0,1)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,3)\big)$. ....

f) $u = X^3 + X^2$, $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ ....

g) $u : x \mapsto \cos\Big(x + \dfrac{\pi}{3}\Big)$, $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$ ....

Calculs de rangs

Calcul 2.2 — Sans calcul.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. ....

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ....

Calcul 2.3

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrices et applications linéaires

Calcul 2.4 — Matrices d'endomorphismes.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0), (0, 1)\big)$. ....

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1), (1, 0)\big)$. ....

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 2), (3, 4)\big)$ ....

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ ....

e) $f : P \mapsto P(X + 2)$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ ....

Calcul 2.5 — **Matrices d'applications linéaires.**

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((0, 1), (1, 0)\big)$.

b) $f : P \mapsto P'$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$. ....

Réponses mélangées

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (-1, 1/2, 1/2) \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

$(-2, 4/5, 11/5) \quad (-1, 3) \quad (3, -1) \quad 2 \quad 1 \quad$ $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$

$1 \quad$ $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 1 \quad 2 \quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (1/2, -\sqrt{3}/2) \quad (9/11, 2/11) \quad (0, 2, 4, 1) \quad 2$

► Réponses et corrigés page 20

Fiche de calcul n° 3

031A

Déterminants

Prérequis
Nombres complexes.

Calculs en dimension deux

Calcul 3.1

Soit a un nombre réel.

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 3 \\ -2\mathrm{i} & 5\mathrm{i} \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 3.2

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 3/2 & 7/2 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(8) \\ -2 & \ln(e^3) \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/7 \\ 5/9 & 7/8 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 85 & 72 \\ 53 & 91 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1-\sqrt{32} \\ 2+\sqrt{8} & 3-\sqrt{8} \end{pmatrix}$ ....

Calculs en dimension trois

Calcul 3.3

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

On rappelle que le nombre complexe j vérifie $\mathrm{j}^3 = 1$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j}^2 & 1 \\ -\mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 3.4

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} \mathrm{j} & -\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ -\mathrm{j} & \mathrm{j} & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & \mathrm{j} & -\mathrm{j} \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2+\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2\mathrm{i}-1 & 1-2\mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$ ....

Calcul 3.5

Soit x, y et z des nombres réels et a un nombre réel strictement positif.

Calculer le déterminant de chacune des matrices d'ordre trois suivantes.

a) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \ln(a) & \ln(a^2) & -2\ln(a) \\ \ln(\sqrt{a}) & -2\ln(a) & \ln(a^2) \\ -\ln(a^2) & \ln(a) & 2\ln(\sqrt{a}) \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$ ....

Réponses mélangées

$9\ln(2)$ $\quad -6\ln^3(a)$ $\quad 3\,919$ $\quad 0$ $\quad 0$ $\quad 7\sqrt{2}+13$ $\quad -2a^2$

$x^3+y^3+z^3-3xyz$ $\quad 227/336$ $\quad -5+6\mathrm{i}$ $\quad -4$ $\quad 6$ $\quad 6\mathrm{i}-12$

-2 $\quad 4/375$ $\quad -40$ $\quad (y-x)(z-y)(z-x)$ $\quad 0$ $\quad 20$

► Réponses et corrigés page 23

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Calcul matriciel

Réponses

1.1 a) .... $\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 3 & 3 & 4\\ 9 & -7 & 3\end{pmatrix}$

1.1 b) .... $\begin{pmatrix}-2 & -6 & -5\\ 15 & -1 & 11\\ 18 & -26 & -1\end{pmatrix}$

1.1 c) .... 17 (matrice 1×1)

1.1 d) .... $\begin{pmatrix}1 & 7 & -2\\ 2 & 14 & -4\\ -1 & -7 & 2\end{pmatrix}$

1.1 e) .... $\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$

1.1 f) .... $\begin{pmatrix}-5 & 15 & 3\end{pmatrix}$

1.1 g) .... $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$

1.1 h) .... $\begin{pmatrix}5 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

1.1 i) .... $\begin{pmatrix}1 & 7 & -2\\ 7 & 49 & -14\\ -2 & -14 & 4\end{pmatrix}$

1.2 a) .... $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1.2 b) .... $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1.2 c) .... $\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1.2 d) .... $\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

1.2 e) .... $\begin{pmatrix}8 & 19\\ 0 & 27\end{pmatrix}$

1.2 f) .... $\begin{pmatrix}2^k & 3^k - 2^k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$

1.2 g) .... $\begin{pmatrix}\cos(2\theta) & -\sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta)\end{pmatrix}$

1.2 h) .... $\begin{pmatrix}\cos(3\theta) & -\sin(3\theta)\\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta)\end{pmatrix}$

1.2 i) .... $\begin{pmatrix}\cos(k\theta) & -\sin(k\theta)\\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta)\end{pmatrix}$

1.2 j) .... $\begin{pmatrix}n & \cdots & n\\ \vdots & (n) & \vdots\\ n & \cdots & n\end{pmatrix}$

1.2 k) .... $\begin{pmatrix}n^2 & \cdots & n^2\\ \vdots & (n^2) & \vdots\\ n^2 & \cdots & n^2\end{pmatrix}$

1.2 l) .... $n^{k-1}D$

1.3 a) .... $2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$

1.3 b) .... $2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$

1.3 c) .... $2 \times 3^{i+j}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

1.3 d) .... $\binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2}$

1.4 a) .... $2^{i-j}\binom{i-1}{j-1}$

1.4 b) .... $\begin{array}{r}(1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1}+\delta_{i,j})\\ +(1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j-1})\end{array}$

1.5 a) .... $\dfrac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix}2 & -e\\ -2 & \pi\end{pmatrix}$

1.5 b) .... $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1-2\mathrm{i}\\ 1 & -1+\mathrm{i}\end{pmatrix}$

1.5 c) .... $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ -6 & -2 & 2\end{pmatrix}$

1.5 d) .... $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

1.5 e) .... $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -2\\ -16 & -6 & 7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$

1.5 f) .... $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix}$

1.5 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

1.5 h) .... $\boxed{\text{Non inversible !}}$

1.5 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

1.6 a) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

1.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}$

1.6 c) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

1.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}}$

Corrigés

1.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

1.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

1.2 c) La conjecture est alors immédiate : les termes diagonaux sont égaux à 1 et le terme $(1,2)$ est égal à k.

....

1.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

....

1.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

....

1.2 f) On remarque que les termes diagonaux valent 2^k et 3^k respectivement, et que, pour A^2, $4+5=9$, pour A^3, $8+19=27$, donc on peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k-2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

....

1.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

....

1.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.
À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{ik}[D]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

....

1.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2 D$.

....

1.2 l) La conjecture est alors évidente.

....

1.3 a) On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si $k > i$, $\binom{i-1}{k-1} = 0$, donc

$$\begin{aligned}
[A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \text{ en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\
&= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}
\end{aligned}$$

1.3 b) On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

1.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned}
[B^\top \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{k} \\
&= \frac{4}{9} 3^{i+j} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4 \times 3^{i+j}}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

1.3 d) On calcule

$$[A \times C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} (\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) = \binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2}$$

1.4 a) Déjà, la matrice A^2 est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit $j \leqslant i$. Alors

$$\begin{aligned}
[A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j} = \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \qquad \text{(en posant } \ell = k-j\text{)} \\
&= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}.
\end{aligned}$$

1.4 b) Pour vérifier ses calculs, il est conseillé de regarder des exemples !

$$n = 4 \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ n = 5 \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} [C^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{i,k+1} + \delta_{i,k-1})(\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k+1}\delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k+1}\delta_{k,j-1} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k-1}\delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k-1}\delta_{k,j-1}. \end{aligned}$$

Si $(i,j) \notin \{1,n\}^2$. Donc

$$[C^2]_{ij} = \delta_{i-1,j+1} + 2\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}.$$

Ceci est confirmé par la structure « tridiagonale espacée » .
Sinon, pour (i,j) quelconque dans $[\![1,n]\!]^2$, on trouve

$$[C^2]_{ij} = (1 - \delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) + (1 - \delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}),$$

car $\delta_{1,k+1} = 0 = \delta_{n,k-1}$ pour tout k entre 1 et n.

1.5 a) On remarque que $2\pi - 2e = 2(\pi - e) \neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$.

1.5 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ \\ \end{array} \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1/2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1/2L_3 \\ \\ \end{array} \end{aligned}$$

Donc B est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1.5 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C = \pi\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc C est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.5 h) On remarque que $L_3 = L_1 + 2L_2 + 2L_4$.

1.6 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{array}$$

Si $\lambda = 1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{1-\lambda} L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{3}{1-\lambda} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1+2\lambda) L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{1-\lambda} L_2 \end{array}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

....

Fiche n° 2. Algèbre linéaire

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{(3,-1)}$

2.1 b) .... $\boxed{(-1,3)}$

2.1 c) .... $\boxed{(9/11, 2/11)}$

2.1 d) .... $\boxed{(-2, 4/5, 11/5)}$

2.1 e) .... $\boxed{(-1, 1/2, 1/2)}$

2.1 f) .... $\boxed{(0,2,4,1)}$

2.1 g) .... $\boxed{(1/2, -\sqrt{3}/2)}$

2.2 a) .... $\boxed{2}$

2.2 b) .... $\boxed{1}$

2.2 c) .... $\boxed{1}$

2.2 d) .... $\boxed{2}$

2.2 e) .... $\boxed{2}$

2.2 f) .... $\boxed{1}$

2.3 a) .... $\boxed{2}$

2.3 b) .... $\boxed{2}$

2.3 c) .... $\boxed{3}$

2.3 d) .... $\boxed{4}$

2.4 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$

2.4 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

2.4 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}}$

2.4 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

2.4 e) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

2.5 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}}$

2.5 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Corrigés

2.1 a) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = 3(0,1) - (-1,2)$.

....

2.1 b) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = -(-1,2) + 3(0,1)$.

....

2.1 c) Notons $u = \lambda(1,2) + \mu(12,13)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ 2\lambda + 13\mu & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ -11\mu & = -2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = \dfrac{9}{11}(1,2) + \dfrac{2}{11}(12,13)$.

....

2.1 d) On note $u = \lambda(0,1,3) + \mu(4,5,6) + \nu(-1,0,1)$. Alors,

$$\begin{cases} 4\mu - \nu & = 1 \\ \lambda + 5\mu & = 2 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ 4\mu - \nu & = 1 \\ -9\mu + \nu & = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ -\nu + 4\mu & = 1 \\ -5\mu & = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -2(0,1,3) + \dfrac{4}{5}(4,5,6) + \dfrac{11}{5}(-1,0,1)$.

....

2.1 e) Notons $u = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,1) + \nu(-1,-1,3)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ \lambda + \mu + 3\nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ 4\nu & = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -(1,0,1) + \dfrac{1}{2}(1,1,1) + \dfrac{1}{2}(-1,-1,3)$.

....

2.1 f) Notons $u = \lambda + \mu X + \nu X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2)$.

En évaluant en 0, $\lambda = 0$.

En évaluant en 1, $\mu = 2$.

En évaluant en 2, $2\mu + 2\nu = 8 + 4 = 12$ soit $\nu = 4$.

En identifiant les coefficients de X^3 dans chacun des membres, $1 = \delta$.

Finalement, $u = 2X + 4X(X-1) + X(X-1)(X-2)$.

2.1 g) En utilisant les formules d'addition, $u(x) = \dfrac{1}{2}\cos(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$.

2.2 a) Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires.

2.2 b) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

2.2 c) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

2.2 d) Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers.

2.2 e) Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires.

2.2 f) Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle.

2.3 a) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

2.3 b) Si $\sin\theta = 0$, i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = n\pi$, alors la matrice est égale à $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et elle est de rang 2.

Sinon, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \sin(\theta)L_1 - \cos(\theta)L_2$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $\sin(\theta) \neq 0$.

2.3 c) En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le rang de la matrice vaut 3.

2.3 d) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $C_2 \leftrightarrow C_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes, le rang de la matrice vaut 4.

....

2.4 a) D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. D'autre part, $f(0,1) = (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

....

2.4 b) D'une part, $f(0,1) = (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

2.4 c) $f(1,2) = (4,-1)$ et $f(3,4) = (10,-1)$. De plus, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc $f(1,2) = -\frac{19}{2}(1,2) + \frac{9}{2}(3,4)$ et $f(3,4) = -\frac{43}{2}(1,2) + \frac{21}{2}(3,4)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$.

....

2.4 d) Comme $f(1,0,0) = (1,3,0) = (1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(1,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) - (0,1,0) + (1,1,1)$ et $f(1,1,1) = (2,2,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,1)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

2.4 e) Comme $f(1) = 1$, $f(X) = X + 2$ et $f(X^2) = (X+2)^2 = X^2 + 4X + 4$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

2.5 a) Comme $f(0,1,3) = (4,-1) = -1(0,1) + 4(1,0)$, $f(4,5,6) = (15,-1) = -1(0,1) + 15(1,0)$ et $f(-1,0,1) = (0,-1) = -(0,1) + 0(1,0)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

....

2.5 b) Comme $f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, $f(X) = 1 = 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$ et $f(X^2) = 2X = 0 \cdot 1 + 2X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

....

Fiche n° 3. Déterminants

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{-2a^2}$

3.1 b) .... $\boxed{6}$

3.1 c) .... $\boxed{-5+6\mathrm{i}}$

3.1 d) .... $\boxed{20}$

3.2 a) .... $\boxed{-2}$

3.2 b) .... $\boxed{9\ln(2)}$

3.2 c) .... $\boxed{227/336}$

3.2 d) .... $\boxed{3\,919}$

3.2 e) .... $\boxed{7\sqrt{2}+13}$

3.3 a) .... $\boxed{0}$

3.3 b) .... $\boxed{-40}$

3.3 c) .... $\boxed{0}$

3.4 a) .... $\boxed{-4}$

3.4 b) .... $\boxed{6\mathrm{i}-12}$

3.4 c) .... $\boxed{4/375}$

3.5 a) .... $\boxed{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

3.5 b) .... $\boxed{-6\ln^3(a)}$

3.5 c) .... $\boxed{(y-x)(z-y)(z-x)}$

3.5 d) .... $\boxed{0}$

Corrigés

3.1 a) Le déterminant vaut $-a^2 - a^2 = -2a^2$.

3.1 b) Le déterminant vaut $-(-2) \times 3 = 6$.

3.1 c) Le déterminant vaut $\mathrm{i} \times 5\mathrm{i} - (-2) \times 3 = -5 + 6\mathrm{i}$.

3.1 d) La matrice est triangulaire inférieure donc son déterminant vaut $-4 \times (-5) = 20$.

3.2 a) Le déterminant vaut $\dfrac{1}{4} \times (3 \times 9 - 5 \times 7) = \dfrac{1}{4} \times (27 - 35) = -2$.

3.2 b) Le déterminant vaut $\ln(2) \times 3 \times \ln(\mathrm{e}) - (-2) \times 3 \times \ln(2) = 9\ln(2)$.

3.2 c) Le déterminant vaut $\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{7}{8}\right) - \dfrac{5}{9} \times \left(-\dfrac{3}{7}\right) = \dfrac{227}{336}$.

3.2 d) Le déterminant vaut 3 919.

3.2 e) Le déterminant vaut $(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{8}) - (2+\sqrt{8})(1-\sqrt{32}) = 7\sqrt{2} + 13$.

3.3 a) Le déterminant vaut 0.

3.3 b) Deux permutations de colonnes, $C_2 \leftrightarrow C_1$ puis $C_3 \leftrightarrow C_2$, ramènent ce déterminant à celui d'une matrice triangulaire supérieure. Son déterminant vaut $-2 \times 5 \times 4 = -40$.

3.3 c) On remarque que la deuxième colonne C_2 vaut $-\mathrm{j} \times C_1$. Ainsi, le déterminant est nul.

3.4 a) Le déterminant vaut -4.

3.4 b) Le déterminant vaut $6\mathrm{i} - 12$.

3.4 c) Le déterminant vaut $\dfrac{4}{375}$.

3.5 a) On reconnaît une matrice circulante. Son déterminant vaut $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

....

3.5 b) Le déterminant vaut $-6\ln^3(a)$.

....

3.5 c) Le déterminant de cette matrice de Vandermonde vaut $(y-x)(z-y)(z-x)$.

....

3.5 d) Les opérations sur les colonnes $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ ramènent au calcul du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ x+1 & 1 & 2 \\ x+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, lui-même nul.

....