Programme de révisions – vacances de Toussaint 2023

Divers

- Du repos pour revenir avec de l'énergie et de la motivation !
- Une bonne répartition des tâches entre les différentes matières.

Cours à maîtriser

Récitez, révisez, appropriez-vous le formulaire (annotez, surlignez...) !
Soyez conscients que ce sont les seules vacances de l'année où vous pouvez consolider les bases de MPSI et de début d'année. Nous aurons notamment besoin de l'algèbre linéaire, des développements limités, des séries et de l'intégration toute l'année.

Démonstrations à réviser (déjà rencontrées pour les khôlles).

- Réviser les développements limités usuels et avoir suffisamment bien compris la formule de Taylor-Young pour obtenir facilement des équivalents en un point.
- L'application $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Mise sous forme canonique d'un polynôme du second degré pour calculer des intégrales se ramenant à arctan, par exemple $\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.
-
  - Montrer que $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
  - Montrer que $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est intégrable sur $]2, +\infty[$.
  - Montrer que $x \mapsto x^2 e^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
  - Montrer que $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x-1)}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
- Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ par deux méthodes : avec une comparaison série-intégrale ; avec le théorème de sommation d'une relation de comparaison, cas convergent.
- Exercice sur l'exponentielle de matrices. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour $A \in E$, on pose
$$N(A) = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$
  1. Montrer que N définit une norme sur E. On la note $\|.\|$ par la suite.
  2. Vérifier que pour A et B dans E, on a $\|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|$. Par récurrence, on obtient alors : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leqslant \|A\|^k$.
  3. Montrer que la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge. Comment appelle-t-on et note-t-on sa somme ?
- Ayant une majoration du reste d'une série convergente par une étude mathématique (par exemple le théorème spécial des séries alternées, mais pas nécessairement), mettons :
$$|R_n| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
  savoir programmer en Python le calcul approché de la somme de la série avec une précision donnée.
- Savoir effectuer une interversion de sommations avec le théorème de Fubini. Par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
- Sommations par paquets (pairs, impairs ou autres).
- Application du théorème du produit de Cauchy à deux séries exponentielles, à deux séries $\sum x^k$.
- Savoir écrire une fonction en Python renvoyant la valeur maximale d'une liste L, ou renvoyant un indice réalisant le maximum dans une liste L.
- Être au point en algèbre linéaire (derniers chapitres).

Pistes pour compléter ce qui précède et approfondir

- Faire une partie des exercices des feuilles d'exercices, en fonction de votre niveau (vous avez les corrigés).
- Revoir ses copies pour ne plus refaire les mêmes erreurs.
- Refaire des parties des DS (en fonction de son niveau).
- Chercher éventuellement l'entraînement distribué et vérifier ses réponses avec le corrigé que je vous enverrai.

Bonnes vacances à tous ! ♥

✉ *Je me tiens à votre disposition par mail si vous avez des questions.*