**Interrogation n°2**
**MP**
*date 2023*

---

## Nom et prénom / Note et commentaires :

---

Sujet nominatif.

- Miguel : 1 et 2. Mouhamadou : 2 et 4. Joshua et Ilyes : au choix (1 et 2) ou (1 et 4).
- Yasmine et Lionel : 1 et 3. Hadrien : 3 et 4.
- Victor et Clément H. : 1 et 6. Marc et Mathis : 7 et 4.
- Rimi, Michèle, Mathéo, Matthis, Ryan, Léo : 5.
- Alex-Olivier, Solenn, Arthur, Kenni, Labib, Clément B. : 1 et 4.

**questions**

1. Donner un équivalent en 1 de $\dfrac{\sqrt{u}-1}{\sin(\pi u)}$.
2. Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer. On fera une intégration par parties.
3. Montrer que la suite $(W_n)$ décroît où $W_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Soit $(u_n)$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n$. Montrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} a_0$$
5. Soit $h$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $h'(x) = \exp(-x^2)$ pour tout réel $x$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction polynôme $Q_n$, dont on précisera le degré, telle que $h^{(n)}(x) = Q_n(x)\exp(-x^2)$ pour tout réel $x$.
6. Soit $a_n = \frac{1}{n} - \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier naturel $k$ non nul, $0 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. En déduire que la suite $(S_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)$ est majorée et convergente.
7. Soit $f : t \mapsto \cos(\frac{t}{1+t^2})$ et $\lambda$ réel.
   (a) Donner un équivalent de $f(t) - \lambda$ quand $t$ tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire l'ensemble des réels pour lesquels $\int\limits_1^{+\infty} \frac{f(t)-\lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   (c) Donner un équivalent de $\int\limits_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ quand $x$ tend vers l'infini.

---