

Exercice 1 – extrait ancien sujet e3a

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$.

1. Pour $x \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Pour $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

Si la convergence était uniforme, comme les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$, le théorème de transmission de continuité s'appliquerait et f serait continue sur $[0, 1]$. Ce n'est pas le cas (f n'est pas continue en 1). La convergence n'est pas uniforme.

2. (a) Pour $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0 \, dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n \, dx \quad \text{et donc} \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ par le théorème des gendarmes.

Il était aussi intéressant de rédiger le théorème de convergence dominée.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

- (b) Par intégration par parties avec $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^{3/2}}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (n+1)x^n \frac{1}{(1+x)^{1/2}} \, dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{(1+x)^{1/2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right)x^n (1+x)^{-3/2} \, dx \\ (n+1)u_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3} \, dx \end{aligned}$$

Avec la même rédaction qu'à la question précédente, à partir de

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3} \leq x^{n+1}$$

et avec la croissance de l'intégrale, on montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3} \, dx = 0$.

Ainsi

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1) \quad \text{puis} \quad (n+1)u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{2}}$$

- (c) Je vous laisse refaire une intégration par parties pour trouver :

$$(n+2)(n+1)u_n = \frac{n+2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5} \, dx$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \text{ et } \alpha_3 = \frac{3}{4}.$$

À nouveau, à partir de $0 \leq \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5} \leq x^{n+2}$, et avec la croissance de l'intégrale, on montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5} \, dx = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{2}n(1+\frac{1}{n})} + \frac{1}{4\sqrt{2}n^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \times \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{o(1)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}n^2} (1 + o(1)) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}n} - \frac{3}{4\sqrt{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

3. On effectue le changement de variables $u = t^{1/n}$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $]0, 1]$ dans $]0, 1]$, de sorte que l'intégrale dont on cherche la limite est

$$J_n = \int_0^1 u^{1/n} h(u^{1/n}) \, du$$

On pose $g_n(u) = u^{1/n} h(u^{1/n})$.

- Pour tout $u \in]0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u) = h(1)$ (par continuité de h en 1).

La suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction constante égale à $h(1)$.

- h est continue sur le segment $[0, 1]$ donc h est bornée et atteint ses bornes (théorème des bornes atteintes). On note M le maximum de h sur $[0, 1]$. On a la domination :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in]0, 1], \quad |g_n(u)| \leq M$$

et $u \mapsto M$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_0^1 h(1) du = h(1)$.

Exercice 2 – ancien sujet e3a PSI

1. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Supposons pour cela que $\sum_{k=0}^n \alpha_k e_k = 0$. On a alors

$$\forall x \geq 0, \quad 0 = e^{-x} \underbrace{\sum_{k=0}^n \alpha_k x^k}_{=Q(x)} = e^{-x} Q(x) \text{ puis } Q(x) = 0$$

Q possède une infinité de racines : c'est le polynôme nul. Ses coefficients α_i sont tous nuls.

$\mathcal{B}$ est libre et engendre E (par définition d'un Vect); c'est donc une base de E . La dimension d'un espace étant le cardinal de l'une de ses bases, on a

$$\dim(E) = N + 1$$

2. (a) Je vous laisse montrer que Δ est linéaire.

$$\Delta(e_0) = -e_0 \text{ et } \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \Delta(e_j) = j e_{j-1} - e_j$$

Donc

$$\text{Im } \Delta = \text{Vect}(\Delta(e_0), \dots, \Delta(e_N)) \subset \text{Vect}(e_0, \dots, e_N) \text{ et } \text{Im } \Delta \subset E$$

Δ est un endomorphisme de E .

- (b) Les calculs précédents montrent que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & N \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A est inversible (triangulaire à coefficients diagonaux non nuls), donc $\Delta \in \text{GL}(E)$.

- (c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale, donc

$$\text{Sp}(\Delta) = \{-1\}$$

$A + I_{N+1}$ est de rang N (les N première lignes sont linéairement indépendantes et la dernière nulle) donc $E_{\Delta}(-1)$ est de dimension 1 par théorème du rang. Comme cet espace contient e_0 , (e_0) est une famille libre de $E_0(\Delta)$ et on a

$$E_0(\Delta) = \text{Vect}(e_0)$$

La somme des dimensions des espaces propres vaut $1 < \dim E$, Δ n'est donc pas diagonalisable.

3. On a $w_n = (x+n)^k e^{-(x+n)} \sim e^{-x} n^k e^{-n} = o(1/n^2)$ par croissances comparées. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{1}{n^2} \geq 0$. Par le théorème de négligeabilité, la série $\sum(w_n)$ est convergente.
4. (a) Une somme (finie) de séries convergentes est convergente et il s'agit là de la linéarité de la somme de séries convergentes.

- (b) Comme $f \in E$, il existe des scalaires α_k tels que $f = \sum_{k=0}^N \alpha_k e_k$. $f(n+x)$ apparaît alors comme combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes. Donc la série $\sum(f(n+x))$ converge et

$$F(x) = \sum_{k=0}^N \left(\alpha_k \sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) \right) = \sum_{k=0}^N \left(\alpha_k e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} \right)$$

- (c) Il s'agit de la question 3. avec $x = 0$.

- (d) k étant fixé, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n} \right)$$

On a une somme finie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} = \sum_{j=0}^k \left(\binom{k}{j} x^{k-j} A_j \right)$$

On en déduit (en gardant les notations de la question précédente)

$$F(x) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k \alpha_k e^{-x} \binom{k}{j} x^{k-j} A_j$$

C'est bien une expression en fonction de A_j mais aussi des α_k qui, eux, ne sont pas dans l'énoncé. Qu'attend-on ?

(e) On veut exprimer F à l'aide des e_i . On a

$$F = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k \alpha_k \binom{k}{j} A_j e_{k-j}$$

Comme $0 \leq k-j \leq N$, on a $F \in E$ (combinaison linéaire de $e_0, \dots, e_N$).

Ainsi Φ va de E dans E . Je vous laisse montrer que Φ est linéaire.

5. On applique ce qui précède avec $F = e_i$ (tous les α_k nuls sauf $\alpha_i = 1$) :

$$\Phi(e_i) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} A_j e_{i-j}$$

On obtient donc pour Φ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice triangulaire :

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0}A_0 & \binom{1}{1}A_1 & \binom{2}{2}A_2 & \dots & \binom{N}{N}A_N \\ 0 & \binom{1}{0}A_0 & \binom{2}{1}A_1 & \dots & \binom{N}{N-1}A_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{0}A_0 & \dots & \binom{N}{N-2}A_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{N}{0}A_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 – ancien sujet e3a PC

1. ANALYSE : Si Φ_a est un endomorphisme de E , alors $\Phi_a(X^{2n}) \in E$.

$$\Phi_a(X^{2n}) = 2n \left(\frac{1}{4} - X^2 \right) X^{2n-1} + aX X^{2n} = (a - 2n)X^{2n+1} - \frac{2n}{4}X^{2n-1}$$

donc $a = 2n$.

SYNTHÈSE : Réciproquement, pour $a = 2n$,

- Φ_a est une application linéaire car pour tout $P, Q \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \Phi_a(\lambda P + Q) \\ &= \left(\frac{1}{4} - X^2 \right) (\lambda P + Q)' + aX(\lambda P + Q) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{4} - X^2 \right) P' + \left(\frac{1}{4} - X^2 \right) Q' + \lambda aXP + aXQ \\ &= \lambda \left(\left(\frac{1}{4} - X^2 \right) P' + aXP \right) + \left(\frac{1}{4} - X^2 \right) Q' + aXQ \\ &= \lambda \Phi_a(P) + \Phi_a(Q) \end{aligned}$$

- $\Im \Phi_a = \text{Vect}(\Phi_a(1), \Phi_a(X), \dots, \Phi_a(X^{2n}))$. Or on a

$$\begin{cases} \Phi_a(1) &= 2nX \text{ de degré } 1 \leq 2 \leq 2n \\ \Phi_a(X^k) &= \frac{k}{4}X^{k-1} + (2n-k)X^{k+1} \text{ pour } k \text{ compris entre } 1 \text{ et } 2n-1 \\ &\text{de degré } k+1 \leq 2n \\ \Phi_a(X^{2n}) &= \frac{n}{2}X^{2n-1} \end{cases}$$

Tous les $(\Phi_a(X^r))_{0 \leq r \leq 2n}$ sont dans E . Donc $\Im \Phi_a \subset E$, donc $\Phi_a : E \rightarrow E$.

Lorsque $a = 2n$, Φ_a est un endomorphisme de E .

Φ_a est un endomorphisme de E si, et seulement si, $a = 2n$.

2. Soit $\lambda \in \llbracket -n, n \rrbracket$.

ANALYSE : S'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\Phi_a(P) = \lambda P$, alors

- Si $\alpha = \beta = 0$, $P = 1$, donc $\Phi_a(P) = 0 + 2nX \neq \lambda P$, donc $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
- Si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$, $P' = \beta(X - \frac{1}{2})^{\beta-1}$, donc

$$\begin{aligned} \Phi_a(P) &= \left(\frac{1}{4} - X^2 \right) \beta \left(X - \frac{1}{2} \right)^{\beta-1} + aX \left(X - \frac{1}{2} \right)^{\beta} \\ &= -\beta \left(X + \frac{1}{2} \right) \left(X - \frac{1}{2} \right)^{\beta} + 2nX \left(X - \frac{1}{2} \right)^{\beta} \\ &= \left(X - \frac{1}{2} \right)^{\beta} \left(2nX - \beta \left(X + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \left(X - \frac{1}{2} \right)^{\beta} \left((2n - \beta)X - \frac{\beta}{2} \right) \\ &= \left((2n - \beta)X - \frac{\beta}{2} \right) P. \end{aligned}$$

De la même façon, si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$,

$$\Phi_a(P) = \left((2n - \alpha)X - \frac{-\alpha}{2} \right) P.$$

Enfin, si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors

$$\begin{aligned} P' &= \alpha \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} + \beta \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \\ &= \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \left(\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. \beta \left(X + \frac{1}{2}\right) \right) \\ &= \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \left((\alpha + \beta)X + \frac{\beta - \alpha}{2} \right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi_a(P) &= \left(\frac{1}{4} - X^2\right) P' + aXP \\ &= -\left(X + \frac{1}{2}\right) \left(X - \frac{1}{2}\right) \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} ((\alpha + \beta)X + \\ &\quad \frac{\beta - \alpha}{2}) + 2nX \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} \\ &= \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} \left(2nX - (\alpha + \beta)X - \frac{\beta - \alpha}{2}\right) \\ &= \left((2n - \alpha - \beta)X - \frac{\beta - \alpha}{2}\right) P. \end{aligned}$$

Cette expression est encore valable pour $\alpha = 0$ et $\beta > 0$ et pour $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, donc on a :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \Phi_a(P) = \left((2n - \alpha - \beta)X - \frac{\beta - \alpha}{2}\right) P.$$

— On a donc, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\Phi_a(P) = \lambda P \Leftrightarrow \begin{cases} 2n - \alpha - \beta = 0 \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2n \\ \alpha - \beta = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = n + \lambda \\ \beta = n - \lambda \end{cases}.$$

SYNTHÈSE : réciproquement, pour $\alpha = n + \lambda$ et $\beta = n - \lambda$,

- comme $\lambda \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $n + \lambda \in \mathbb{N}$ et $n - \lambda \in \mathbb{N}$,
- $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta}$ est donc un polynôme comme produit de polynômes et $\deg(P) = \alpha + \beta = n + \lambda + n - \lambda = 2n$, donc $P \in E$.

— comme $(n + \lambda) + (n - \lambda) = 2n \neq 0$, on a $(n + \lambda, n - \lambda) \neq (0, 0)$, donc, par l'analyse, $\Phi_a(P) = \lambda P$

En conclusion, pour tout $\lambda \in \llbracket -n, n \rrbracket$ il existe un unique couple d'entiers (α, β) tel que $P \in E$ et $\Phi_a(P) = \lambda P$, où $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta}$, c'est le couple $(\alpha, \beta) = (n + \lambda, n - \lambda)$.

3. • Pour tout $\lambda \in \llbracket -n, n \rrbracket$, λ est valeur propre de Φ_a et $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^{n+\lambda} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{n-\lambda} \neq 0$ est un vecteur propre associé. On a donc $\llbracket -n, n \rrbracket \subset \text{Sp}(\Phi_a)$ et, comme $\text{Card}(\text{Sp}(\Phi_a)) \leq \dim E = 2n + 1 = \text{Card}(\llbracket -n, n \rrbracket)$, on a trouvé toutes les valeurs propres :

$$\boxed{\text{Sp}(\Phi_a) = \llbracket -n, n \rrbracket}$$

Donc Φ_a a $2n + 1$ valeurs propres distinctes, et par condition suffisante, Φ_a est diagonalisable et tous ses espaces propres sont de dimension 1.

• Or, $\text{Vect} \left(\left(X + \frac{1}{2}\right)^{n+\lambda} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{n-\lambda} \right) \subset E_{\lambda}(\Phi_a)$, donc, par inclusion et égalité des dimensions,

$$\boxed{E_{\lambda}(\Phi_a) = \text{Vect} \left(\left(X + \frac{1}{2}\right)^{n+\lambda} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{n-\lambda} \right)}$$

4. Soit $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_a)$. Alors, d'après la question précédente, il existe P inversible telle que

$$A = P \text{diag}(-n, -(n-1), \dots, 0, 1, \dots, n) P^{-1},$$

et, comme $\Phi_a(1) = 2nX$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$,

$$\Phi_a(X^k) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) kX^{k-1} + 2nX^{k+1} = (2n - k)X^{k+1} + \frac{k}{4}X^{k-1},$$

on a $a_{k,k} = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, car $a_{k,k}$ est le coefficient de degré k de $\Phi_a(X^k)$. A a donc sa diagonale nulle.

Posons alors $B = A + nI_{2n+1}$. On a

$$\begin{aligned} B &= A + nI_{2n+1} = P \text{diag}(-n, -(n-1), \dots, 0, 1, \dots, n) P^{-1} + P(nI_{2n+1}) P^{-1} \\ &= \text{diag}(0, 1, \dots, 2n) P^{-1} \end{aligned}$$

donc B est diagonalisable et $\text{Sp}(B) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

De plus, comme $B = A + nI_{2n+1}$, les coefficients diagonaux de B sont tous égaux à n .

La matrice B répond donc aux conditions demandées dans l'énoncé.

5. Comme

$$B^2 = P \operatorname{diag}(0, 1^2, 2^2, \dots, (2n)^2) P^{-1}$$

B^2 est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(B^2) = \{0, 1^2, \dots, (2n)^2\}$.

Or, $B^2 = (A + nI_{2n+1})^2 = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}((\Phi_a + n \operatorname{Id}_E)^2)$, donc $\Psi = (\Phi_a + n \operatorname{Id}_E)^2$ convient.

Exercice 4 – ancien sujet e3a MP

1. Je vous laisse montrer que $u^+ \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $h \in G$.

L'application $g \mapsto gh$ est une bijection de G dans G ($gh = \ell \Leftrightarrow g = \ell h^{-1}$). On peut donc effectuer le changement de variables $\ell = gh$ dans la somme suivante :

$$\begin{aligned} u^+ h &= \left(\frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g \right) h \\ &= \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} h h^{-1} g^{-1} u g h \\ &= h \left(\frac{1}{m} \sum_{\ell \in G} \ell^{-1} u \ell \right) = h u^+ \end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall h \in G, \quad u^+ h = h u^+}$.

2. Ainsi, $(u^+)^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u^+ g = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} g u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} u^+ = \frac{1}{m} m u^+$ soit

$$\boxed{(u^+)^+ = u^+}.$$

3. On a $\forall g \in G, \operatorname{Tr}(g^{-1} u g) = \operatorname{Tr}(u)$ donc, par linéarité de la trace

$$\boxed{\operatorname{Tr}(u^+) = \operatorname{Tr}(u)}.$$

4. Soit $x \in F = \operatorname{Im} p$, on a donc $p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} p g(x)$. Or, pour tout $g \in G$, F

est stable par G donc $g(x) \in F = \operatorname{Im} p$ et donc $p(g(x)) = g(x)$.

Ainsi, $p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} g(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} x = x$ donc $x \in \operatorname{Im} p^+$. Donc

$$\boxed{F \subset \operatorname{Im} p^+}.$$

5. • Pour tout $x \in \ker p$, on a $g^{-1} p g h^{-1} p(x) = 0 = h^{-1} p(x)$.
 • Pour tout $x \in \operatorname{Im} p = F$, on a $g(h^{-1}(x)) \in F$ (puisque F est stable par tout élément de G), et pour tout $t \in \operatorname{Im} p$, $p(t) = t$, donc $p(g(h^{-1}(x))) = g(h^{-1}(x))$, puis $g^{-1}(p(g(h^{-1}(x)))) = h^{-1}(x) = h^{-1}(p(x))$.

Ainsi, $g^{-1} p g h^{-1} p$ et $h^{-1} p$ coïncident sur $\ker p$ et sur $\operatorname{Im} p$.

Comme $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$, ces deux applications sont égales sur E .

6. On a

$$\begin{aligned} (p^+)^2 &= \left(\frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} p g \right) \left(\frac{1}{m} \sum_{h \in G} h^{-1} p h \right) \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} g^{-1} p g h^{-1} p h \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} h^{-1} p h \quad \text{d'après 5} \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{g \in G} m p^+ = \frac{1}{m^2} m^2 p^+ = p^+ \end{aligned}$$

donc $\boxed{p^+ \text{ est un projecteur }}$.

7. Puisque p^+ est un projecteur, on a $\operatorname{rg} p^+ = \operatorname{Tr}(p^+)$.

Or, 3. donne $\operatorname{Tr}(p^+) = \operatorname{Tr}(p) = \operatorname{rg} p$ donc $\operatorname{rg} p^+ = \operatorname{rg} p$ et l'inclusion de 4. : $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} p^+$ donne finalement

$$\boxed{\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} p^+}$$

8. • Puisque p^+ est un projecteur, $\boxed{\ker p^+ \text{ est un supplémentaire de } F = \operatorname{Im} p^+}$.

• Pour tout $g \in G$, g et p^+ commutent d'après 1., donc $\boxed{\ker p^+ \text{ est stable par } g}$.

9. Si F est stable par tout $g \in G$, il suffit de choisir un projecteur d'image F (qui existe car F admet des supplémentaires) et d'appliquer 8.

Tout sous-espace stable par tout $g \in G$ admet au moins un supplémentaire stable par tout $g \in G$.