

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera. (5/2 *uniquement*) La convergence est-elle uniforme ?
2. Soit $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
 - (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
 - (b) Montrer que $(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3} dx$. En déduire un équivalent de u_n .
 - (c) Déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ réels tels que pour entier naturel n ,

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5} dx$$

En déduire un développement asymptotique de u_n (à expliciter) de la forme :

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3. Soit h une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que la suite $\left(n \int_0^1 x^n h(x) dx\right)$ admet une limite finie et exprimer cette limite en fonction de h .

Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on note $e_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n e^{-x}$.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et E le sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ défini par $E = \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_N)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_N)$ est une base de E . En déduire la dimension de E .
2. Pour tout élément g de E , on note $\Delta(g) = g'$.
 - (a) Démontrer que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.
 - (b) Écrire la matrice A de Δ dans la base $\mathcal{B}$. Δ est-il un automorphisme de E ?
 - (c) Δ est-il diagonalisable ?
3. Soient $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et $x \geq 0$. Montrer que la série de terme général $w_n = e_k(x+n)$ est convergente.
4. (a) Pour tout entier naturel k , on considère une suite $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,k}$ converge.

Citer le théorème du cours qui justifie que l'on a (pour tout $N \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^N u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right)$$

- (b) Soit $f \in E$. Démontrer que la série de terme général $u_n = f(n+x)$ est convergente pour tout $x \geq 0$. On note alors

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$$

(c) Justifier que la série de terme général $n^j e^{-n}$ pour tout j fixé de $\mathbb{N}$ est convergente. On note alors

$$A_j = \sum_{n=0}^{+\infty} n^j e^{-n}$$

(d) Exprimer $F(x)$ en fonction des A_j pour tout $x \geq 0$.

(e) En déduire que $F \in E$ et que l'application $\Phi : f \mapsto F$ ainsi définie est un endomorphisme de E .

5. Écrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des A_j .

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^{2n})$ et a un réel.

On considère l'application Φ_a définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) P' + aXP$$

1. Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E .

Désormais a est choisi de sorte que Φ_a est un endomorphisme de E .

2. Soit $\lambda \in \llbracket -n, n \rrbracket$. Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_a(P) = \lambda P$.

3. Déterminer alors les éléments propres de l'endomorphisme Φ_a .

On donnera pour chaque sous-espace propre une famille de polynômes constituant une base de ce sous-espace.

4. Déterminer une matrice B dont le spectre est $\llbracket 0, 2n \rrbracket$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

5. Expliquer comment construire à l'aide Φ_a un endomorphisme Ψ de E admettant $0, 1, 4, 8, \dots, 4n^2$ comme valeurs propres.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, F un sous-espace de E et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de E , de cardinal m , tel que F soit stable par tout élément g de G .

Le produit $u \circ v$ de deux endomorphismes de E sera noté plus simplement uv . À tout endomorphisme u de E , on associe u^+ défini par :

$$u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g$$

1. Montrer que u^+ est un endomorphisme de E commutant avec tout élément h de G .

2. Calculer $(u^+)^+$.

3. Calculer la trace de u^+ en fonction de celle de u .

4. Soit p un projecteur de E d'image F . Montrer que F est inclus dans l'image de p^+ .

5. Montrer que, pour tous g et h de G , on a $g^{-1} p g h^{-1} p h = h^{-1} p h$.

6. Montrer que p^+ est un projecteur.

7. Comparer les images de p et de p^+ .

8. Montrer que le noyau de p^+ est un supplémentaire de F stable par tout élément g de G .

9. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par tout g de G admet un supplémentaire stable par tout g de G .