

Entraînement CCINP (extrait CCINP 2023 PSI)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On s'intéresse ici à la convergence des suites matricielles $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ avec $p = 1$ (matrices colonnes) ou $p = n$ (matrices carrées). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ ou plus simplement $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)$.

On suppose que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni d'une norme, et on se permet de noter cette norme $\|\cdot\|$ indifféremment des valeurs de n et p . En particulier, si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et on note $\|V\|$ sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;
- la suite des normes $(\|M_k - A\|)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ;
- pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite de nombres complexes $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'une matrice donnée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I - Limite des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où $\text{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u . On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$. L'objectif de cette partie est de montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

On suppose, sauf à la dernière question de cette partie, que $A = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$ et en déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_1) = 0$.

On suppose qu'il existe $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_j) = 0$.

2. Montrer qu'il existe $x \in \text{Vect}\left((e_j)_{j \in \llbracket 1, i \rrbracket}\right)$ tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

3. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$. En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$.

4. Montrer alors que $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$.

5. On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

Indications

1. $u(e_1)$ se lit dans la matrice T . À partir de là, calculez $u^2(e_1)$, $u^3(e_1)$ et conjecturez.
 2.
 - Lire la matrice, tout simplement.
 - Récurrence.
 3. Question difficile, qui peut être passée par les étudiants en difficulté.
Montrez pour commencer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(x) = 0$. Prenez ensuite $\varepsilon > 0$ et considérez k_0 tel que pour $k \geq k_0$, $\|u^k(x)\| \leq \varepsilon$.
 4. Pas d'indication.
 5. Pourquoi A est-elle trigonalisable ? Utilisez alors une trigonalisation de A (et justifiez bien!).
-