Devoir surveillé n° 6 – sujet B
MP
samedi 23 mars 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Exercice de concours (maximum 1 heure)

On note L_∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées et $\|.\|_\infty$ la norme sur L_∞ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \|u\|_\infty = \sup\{|u_n|,\ n \in \mathbb{N}\}$$

1. Montrer que l'espace vectoriel F des suites réelles convergentes et de limite nulle est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty,\ \|.\|_\infty)$.
2. On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ converge.
   (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de F.
   (b) L'ensemble E est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty,\ \|.\|_\infty)$? Quelle est son adhérence ?
3. On note Φ l'application qui, à tout élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

   (a) Calculer $\|u\|_\infty$ et $\|\Phi(u)\|_\infty$ lorsque u est une suite géométrique convergente de premier terme u_0 égal à 1.
   (b) Démontrer que Φ est une application linéaire et injective de E dans L_∞, dont l'image est F.
4. On note Ψ la restriction de Φ à E, considérée comme une bijection de E sur F. On munit E et F de la norme $\|.\|_\infty$.
   (a) L'application Ψ est-elle continue ?
   (b) L'application réciproque Ψ^{-1} est-elle continue ?

Problème de concours (3 heures)

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire »pour parler d'une variable aléatoire discrète, et « variable aléatoire entière »pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 ***(Dispersion d'ordre*** α***)*** *On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X* ***vérifie la condition*** $(\mathcal{D}_\alpha)$ *- dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,*

$$P(|X| \geqslant n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Définition 2 ***(Variables aléatoires symétriques)*** *On dit que X est* ***symétrique*** *lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = P(X = -x).$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1 *Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi, alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.*

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n-ième moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.
Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1. Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ».
   Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.
2. Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $P(|X| \leqslant M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3. Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.
4. Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $E(f(X)) = 0$.
5. Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1-uz}\,\mathrm{d}u.$$

6. Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n-ième pour tout $n \geqslant 1$.
7. Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leqslant |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.
8. En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

9. En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10. Montrer que la fonction
$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (t,u) & \mapsto |1+ue^{it}| \end{cases}$$
est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0,\pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que
$$\forall (t,u) \in [-a,a] \times [0,1], \quad |1+ue^{it}| \geqslant m_a.$$
11. Montrer que la fonction
$$F : t \in]-\pi,\pi[\mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\,\mathrm{d}u$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.
12. Montrer que
$$\forall t \in]-\pi,\pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$
et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi,\pi[$.
13. Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Déduire des questions précédentes que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose
$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto E(\cos(tX)), \end{cases}$$
appellée fonction caractéristique de X.

14. Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.
15. En utilisant le théorème de transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$R_n := P(|X| \geqslant n).$$

16. On fixe $t \in]0,2\pi[$. Montrer successivement que
$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1})\cos(nt)$$
puis
$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right].$$
On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.
17. Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t\to 0^+}{\to} C,$$
et en déduire que, quand t tend vers 0^+,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$
18. Conclure que, quand t tend vers 0^+,
$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}t + o(t).$$
La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19. Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

21. En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\to} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22. La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

A partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$,

$$P(a \leqslant M_n \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$